

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS DE CONVECCIÓN DIFUSIÓN. APLICACIÓN A LA CONVECCIÓN NATURAL

Marta Benítez García
Departamento de Matemática Aplicada
Universidade de Santiago de Compostela



Julio 2009

Don Alfredo Bermúdez de Castro López-Varela, catedrático del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidade de Santiago de Compostela, informa que la memoria titulada:

**MÉTODOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS DE CONVECCIÓN DIFUSIÓN.
APLICACIÓN A LA CONVECCIÓN NATURAL**

fue realizada bajo su dirección por Doña Marta Benítez García, estimando que la interesada se encuentra en condiciones de optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, por lo que solicita que sea admitida a trámite para su lectura y defensa pública.

En Santiago de Compostela, a 28 de julio de 2009.

El Director:

Prof. Dr. Alfredo Bermúdez de Castro López-Varela

La doctoranda: Marta Benítez García

Agradecimientos

En primer lugar, quería mostrar mi agradecimiento al director de este trabajo, el profesor *Alfredo Bermúdez de Castro*. Fue la persona que me guió desde mi inicio hasta la consecución de esta memoria. Tengo que agradecerle la dedicación que me prestó en todo momento, haciéndome siempre un hueco en su complicada agenda. Sus indicaciones me resultaron siempre muy útiles. Desprende tanta ilusión por su trabajo que hace que los que trabajamos con él también la sintamos. Siempre me dio muchísimo ánimo, por lo que me facilitó enormemente el trabajo. Muchísimas gracias Alfredo.

En segundo lugar, quería agradecerle a los profesores Tomás Chacón Rebollo y Macarena Gómez Mármol la ayuda que me prestaron durante mis estancias en Sevilla. Gracias a ellos dos y en general a todos los miembros del Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, me sentí como una más del Departamento. Además, se respira muchísimísima alegría (andaluza), por lo que estuve encantada.

Gracias a todos mis compañeros de despacho por el buen ambiente en el que se trabaja (Laura, Luz, Bea, Jorge, Carlos S., Carlos M., Silvia, María, Ibán, etc). En especial, quería agradecer a Laura y a Luz la ayuda que siempre me prestaron. Gracias a ellas las pausas del café eran el momento de risas del día. Gracias de verdad a las dos, me encató compartir esta etapa desde el principio con vosotras. Rafa, gracias por resolver, en mis comienzos, las dudas existenciales que me surgían. En general gracias a todos los doctorandos (Tere, Cris, Rebeca, Manuel, etc).

También quería mostrar mi agradecimiento a todos los miembros del Departamento de Matemática Aplicada por la ayuda e interés que siempre me demostraron. Quería mencionar en particular a María Nogueiras y a Pili por ayudarme en mis comienzos y a Rafael Muñoz por hacerlo con las últimas dudas teóricas con las que me enfrentaba.

Gracias a Carlos por estos maravillosos años que pasamos juntos, entendiendo el poco tiempo libre del que dispuse en estos últimos meses.

Por último, agradecer a toda mi familia el apoyo incondicional que siempre me demostró. Gracias a mis padres por el optimismo y la alegría que desprenden, gracias a ellos los momentos duros no los viví como tal (os adoro). Gracias a mi hermana que a pesar de estar en la distancia siempre la noto cerca. Gracias a mis abuelos por ayudarme a desconectar del trabajo.

Este trabajo fue financiado por el *Ministerio de Educación* a través de sus becas FPU.

Índice general

Introducción	1
I Métodos de características	5
Introducción	7
1. Discretización temporal: métodos de características	11
1.1. Introducción	11
1.2. Problema de Cauchy y notaciones	12
1.3. Dos formulaciones del problema	25
1.3.1. Formulación I	25
1.3.2. Formulación II	27
1.4. Discretización temporal	29
1.5. Método de Crank-Nicholson Lagrangiano	31
1.5.1. Curvas características : resultados preliminares	32
1.5.2. Aproximación de las curvas características	39
1.5.3. Problema semidiscretizado en tiempo	54
1.5.4. Existencia y unicidad de solución del problema semidiscretizado	56
2. Estabilidad del método de Crank-Nicholson Lagrangiano	59
2.1. Introducción	59
2.2. Notaciones y resultados preliminares	60
2.3. Estabilidad en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ del método semidiscretizado	62
2.4. Estabilidad en norma $l^\infty(H^1(\Omega))$ del método semidiscretizado	68
3. Estimación de error temporal	81

3.1. Introducción	81
3.2. Otros resultados de estabilidad para el problema semidiscretizado	82
3.2.1. Estabilidad en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ para un segundo miembro general	82
3.2.2. Estabilidad en norma $l^\infty(H^1(\Omega))$ para un segundo miembro general	85
3.3. Estimación de error para el problema semidiscretizado	89
4. Estimación de error para la discretización total. Resultados Numéricos	111
4.1. Introducción	111
4.2. Discretización espacial : método de elementos finitos	112
4.3. Análisis del método de Lagrange-Galerkin de Crank-Nicholson	112
4.3.1. Estabilidad del método totalmente discretizado	113
4.3.2. Estimación de error en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ del método totalmente discretizado . . .	114
4.3.3. Estimación de error en norma $l^\infty(H^1(\Omega))$ del método totalmente discretizado . . .	120
4.3.4. Estimación de error en coordenadas espaciales	129
4.4. Resultados Numéricos	132
 II Método PSI	 149
 Introducción	 151
 5. Métodos distributivos	 153
5.1. Introducción	153
5.2. Problema de Cauchy	153
5.3. Formulación débil	154
5.4. Discretización espacial: método de elementos finitos.	154
5.5. Discretización del término convectivo	155
5.6. El N-esquema y el esquema PSI	159
5.6.1. El N-esquema	160
5.6.2. El esquema PSI	161
 6. El método PSI	 167
6.1. Introducción	167
6.2. Discretización temporal	167
6.3. Resultados numéricos	172

III Aplicación a la Convección Natural	185
Introducción	187
7. Modelización matemática	189
7.1. Introducción	189
7.2. Modelo matemático general	189
7.3. Aproximación de Boussinesq	191
7.3.1. Linealización	192
7.3.2. Ecuaciones adimensionales	193
7.4. Formulación débil	195
8. Resolución Numérica	197
8.1. Introducción	197
8.2. Discretización espacial: método de elementos finitos	197
8.3. Discretización temporal	200
8.3.1. Método de características semi-Lagrangiano I	200
8.3.2. Método de características semi-Lagrangiano II	204
8.3.3. Método de características Lagrangiano	207
8.3.4. Método PSI	210
8.4. Resultados Numéricos	215
Conclusiones	234
Bibliografía	237

Introducción

Las ecuaciones de convección-difusión presentan numerosas aplicaciones en Ingeniería y ciencias aplicadas. Por ejemplo, los procesos de convección natural se modelan a través de dichas ecuaciones. Dichos procesos se originan cuando en un fluido se producen variaciones de temperatura, originando variaciones espaciales de densidad, lo que ocasiona que el fluido esté sometido a distintas fuerzas gravitatorias que pueden originar su movimiento. Los procesos de convección natural presentan numerosas aplicaciones en situaciones reales, por ejemplo, cuando se tratan problemas de climatización en arquitectura, de contaminación marina, de diseño de ventanas de doble cristal, etc.

En este trabajo estamos interesados en desarrollar métodos numéricos precisos y estables para problemas de convección-difusión.

En muchos casos el término difusivo es más pequeño que el término convectivo, dando lugar a problemas de convección dominante. Para obtener métodos apropiados de discretización para estos problemas es necesario utilizar técnicas que descentren las discretizaciones de dicho término convectivo. Por este motivo, en este trabajo consideramos dos estrategias diferentes que descentran el término convectivo: métodos de características ([63]) y métodos distributivos ([69]). Estos métodos presentan buenas propiedades, lo que hacen de ellos una herramienta eficaz para la resolución numérica de problemas de convección.

Métodos de características

Los métodos de características están basados en la discretización de la derivada total (o material), es decir de la derivada temporal a lo largo de las trayectorias. Estos métodos pueden ser Lagrangianos o semi-Lagrangianos, con ello nos referiremos, respectivamente, a que el problema discretizado se formule en coordenadas Lagrangianas (es decir, en la configuración de referencia) o en coordenadas espaciales (es decir, en las configuraciones deformadas por el movimiento). Existe numerosa bibliografía que estudia matemáticamente los métodos de características semi-Lagrangianos, fundamentalmente el método clásico de primer orden ([7], [38], [63]). Sin embargo, es escasa la que desarrolla un análisis riguroso para métodos enteramente Lagrangianos. En este trabajo utilizamos diferentes métodos de características basados, en el método clásico semi-Lagrangiano y en una formulación Lagrangiana. Concretamente, proponemos dos formulaciones que generalizan a la clásica semi-Lagrangiana y con las que es posible obtener a la vez métodos Lagrangianos y semi-Lagrangianos. Un caso particular de la segunda, se utiliza para obtener el método de características enteramente Lagrangiano que estudiamos matemáticamente en la primera parte de este trabajo. Estamos interesados en obtener métodos de características de alto orden; lo que se puede conseguir utilizando fórmulas de alto orden para la discretización de la derivada material. En la bibliografía se estudian métodos de características semi-Lagrangianos de alto orden, utilizando por ejemplo, métodos multipaso ([21], [22], [65]) o métodos de Crank-Nicholson de segundo orden ([19], [20], [71]). En [29] se analizan dos métodos, uno Lagrangiano y otro semi-Lagrangiano para problemas de convección-difusión. Se obtienen estimaciones de error para el método Lagrangiano semidiscretizado en espacio utilizando elementos finitos; y también para el análogo semi-Lagrangiano discretizado en tiempo y espacio usando un método de elementos finitos discontinuos. Las estimaciones obtenidas están expresadas en términos

de operadores de proyección. En este trabajo estudiamos un método de Crank-Nicholson Lagrangiano de segundo orden, discretizado en espacio utilizando un método de elementos finitos. Probamos resultados de estabilidad y convergencia en norma H^1 , en primer lugar para el problema semidiscretizado en tiempo, y en segundo lugar para el método totalmente discretizado.

El gran inconveniente que presentan los métodos de características es que para su implementación práctica es necesario utilizar fórmulas de cuadratura. Como consecuencia de la integración numérica aparecen nuevos términos en las estimaciones de error, que en algunos casos ocasionan la pérdida de estabilidad incondicional (ver, por ejemplo, [55], [66], [77]). En este trabajo, analizamos numéricamente la influencia de las fórmulas de cuadratura para distintos métodos de características Lagrangianos y semi-Lagrangianos.

Métodos distributivos

La idea base de los métodos distributivos es distribuir el flujo convectivo en cada elemento del mallado entre los nodos situados corriente arriba. Dos de los principales esquemas distributivos son el N-esquema (Narrow) y el PSI (Positive Streamwise Implicit). El N-esquema es lineal, positivo y de primer orden (ver [61] y [62]). El PSI es una extensión de segundo orden para el estado estacionario del N-esquema (ver [25], [36], [70]). Este método es bien equilibrado al segundo orden para flujos de convección dominante (ver [25]) y es particularmente preciso en zonas de grandes gradientes o discontinuidades de la solución. En la segunda parte de este trabajo presentamos de forma rigurosa la técnica general de discretización del término convectivo mediante los métodos distributivos. En particular, introducimos dos de los métodos distributivos más importantes: el N-esquema y el PSI. Implementamos mediante programas de ordenador dichos métodos y verificamos los resultados que predice la teoría.

En la tercera parte de este trabajo consideramos problemas de convección natural. Típicamente, los fenómenos de transporte en un fluido están gobernados por las ecuaciones básicas de conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía. Sin embargo en el caso de la convección natural generalmente se utiliza la aproximación de Boussinesq (ver [50]). Dado el carácter evolutivo del problema que se quiere analizar y la importancia de la convección en el mismo y para obtener esquemas descentrados, utilizamos métodos de las características de segundo orden o alternativamente el método PSI en combinación con métodos de elementos finitos, para resolver numéricamente el problema acoplado de las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía (ver, por ejemplo, [19], [20], [22], [25]). Los algoritmos obtenidos se implementan mediante programas de ordenador escritos en FORTRAN. Con objeto de testear los métodos propuestos resolvemos un problema bidimensional de convección natural en una cavidad cuadrada donde las paredes verticales se encuentran a distintas temperaturas y comparamos los resultados obtenidos con los que aparecen en la bibliografía (ver [35], [53], [54], y [81]).

Este trabajo se divide en tres partes.

En la primera parte se proponen diferentes métodos de características Lagrangianos y semi-Lagrangianos para la discretización de problemas de convección-difusión con difusión degenerada. Analizamos matemáticamente un método de características de Crank-Nicholson enteramente Lagrangiano combinado con un método de elementos finitos obteniendo resultados de estabilidad y convergencia. Presentamos los resultados numéricos obtenidos con diferentes métodos de características y verificamos los órdenes de convergencia probados para el método de Crank-Nicholson Lagrangiano.

En la segunda parte de este trabajo proponemos una alternativa a los métodos de características: el método PSI. Presentamos resultados numéricos que corroboran los resultados teóricos que se han obtenido en la literatura.

En la tercera parte, obtenemos los modelos matemáticos implicados en los procesos de convección natural. Proponemos una discretización espacial utilizando un método de elementos finitos y una discretización

temporal utilizando métodos de características de segundo orden y el método PSI. Presentamos los resultados numéricos obtenidos para un problema de convección natural y los comparamos con presentados por otros autores.

Parte I

Métodos de características

Introducción

Importantes problemas de diferentes campos de la Ingeniería y las ciencias aplicadas se modelan a través de la ecuación de convección-difusión; por ejemplo en mecánica de fluidos, transferencia de calor, finanzas, etc.

En muchos casos el término difusivo es más pequeño que el término convectivo, dando lugar a problemas de convección dominante. Incluso en algunas situaciones el término difusivo se vuelve degenerado, como ocurre en algunos modelos de valoración de productos financieros (ver [68]).

Es un hecho bien conocido que para problemas hiperbólicos es más complicado desarrollar métodos numéricos precisos y estables que para problemas elípticos o parabólicos. Esta desventaja también la presentan los métodos de convección dominante; una prueba de ello es que el método de Galerkin estándar no es una técnica adecuada de discretización para estos problemas (ver [29]). Por este motivo, se ha llevado a cabo una intensa actividad investigadora en este campo con objeto de desarrollar métodos numéricos que proporcionen aproximaciones más precisas y estables del término convectivo (ver, por ejemplo, [8], [12], [38], [39], [52]). Para ello es necesario utilizar técnicas que descentren las discretizaciones de dicho término convectivo; como son, métodos de características ([63]), métodos distributivos ([69]), métodos estabilizados ([44], [45]), etc. Por ejemplo en [13] se analiza el método de elementos finitos para problemas de convección dominante en formulación Euleriana y Lagrangiana. Se obtienen estimaciones de error con constantes que dependen sólo de los datos y se mantienen acotadas en el límite hiperbólico, para una velocidad que se anula sobre la frontera y de divergencia nula. Concretamente, se prueba convergencia de orden subóptimo para el problema en coordenadas Eulerianas mientras que para el método Lagrangiano se consigue orden óptimo.

Dado el carácter evolutivo del problema y la importancia de la convección en el mismo, con objeto de obtener esquemas descentrados, una posible estrategia para la discretización temporal es utilizar un método clásico en el contexto de los problemas hiperbólicos: el método de características (ver, por ejemplo, [64]). Los métodos de características están basados en la discretización de la derivada total (o material), es decir, de la derivada temporal a lo largo de las trayectorias, también llamadas curvas características. En este trabajo utilizamos diferentes estrategias basadas, en el método clásico semi-Lagrangiano y en una formulación Lagrangiana. Los métodos de características han sido analizados matemáticamente por muchos autores y aplicados a diferentes problemas. Podemos citar algunas de sus propiedades:

- Son incondicionalmente estables, incluso para la ecuación de transporte (difusión nula).
- En problemas con un término convectivo dominante, la solución cambia menos rápidamente a lo largo de las curvas características. Por lo tanto, los métodos de características permiten considerar pasos de tiempo mayores sin pérdida de precisión; de esta manera se acorta el tiempo de cálculo necesario para la simulación.
- Como el operador de convección se trata de forma explícita, se obtienen sistemas de ecuaciones

simétricos.

- Teóricamente preservan el balance de masa local y global.

El método clásico de características es semi-Lagrangiano. Fue introducido a principios de los años 80 y es de primer orden en tiempo. Este método aplicado a las ecuaciones de convección-difusión se combina con diferentes discretizaciones espaciales, por ejemplo, elementos finitos ([38], [63]), diferencias finitas ([38]), elementos finitos espectrales ([7]), etc. En principio, el método se introduce para resolver ecuaciones evolutivas, pero en [17] se propone una adaptación para resolver ecuaciones de convección-difusión estacionarias y en ([9], [10], [11]) se combina el método clásico de primer orden con métodos de Galerkin discontinuos aplicados a ecuaciones hiperbólicas estacionarias. Además, este método también se utiliza para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes (ver [63], [76]). Los métodos de características combinados con elementos finitos se denominan en ocasiones métodos de Lagrange-Galerkin.

Existe numerosa bibliografía que estudia matemáticamente el método clásico de características combinado con elementos finitos, para resolver ecuaciones de convección-difusión. Si Δt denota el paso temporal, h el paso espacial y k el grado del espacio de elementos finitos, en [77] se obtienen estimaciones de error de la forma $O(h^k + \Delta t)$ en norma $l^\infty(L^2(\mathbb{R}^d))$ (d denota la dimensión del dominio espacial). En [63] se prueban estimaciones de error de la forma $O(h^k + \Delta t + k^{k+1}/\Delta t)$ en el espacio $l^\infty(L^2(\Omega))$ bajo la hipótesis de que la componente normal de la velocidad se anula sobre la frontera del dominio espacial Ω . Todas estas estimaciones involucran constantes que dependen de la norma de la solución. En [12] se obtienen estimaciones con constantes que dependen sólo de los datos, para elementos finitos lineales y una velocidad que se anula sobre la frontera. En concreto, se tiene convergencia de orden $O(h^2 + \min(h, h^2/\Delta t) + \Delta t)$ en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$.

Estamos interesados en obtener métodos de características de mayor orden; lo que se puede conseguir utilizando fórmulas de alto orden para la discretización de la derivada material. En [65] se analizan métodos de Lagrange-Galerkin multipaso para problemas de convección-difusión. En [21] y [22] se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando métodos multipaso para la discretización de la derivada material, combinados con métodos de elementos finitos y métodos espectrales para la discretización espacial. Se obtienen estimaciones de error para el problema discretizado y se prueba la estabilidad del método. En [71], se propone un método de características de Crank-Nicholson de segundo orden para resolver una ecuación de convección-difusión con condiciones de contorno Dirichlet. Se prueba la estabilidad del método y su convergencia con orden $O(\Delta t^2 + h^k)$. Estos resultados se extienden en [19] y [20] a casos más generales.

En este trabajo presentamos diferentes métodos de características de segundo orden, cuyas semidiscretizaciones temporales se basan en (ver, por ejemplo, [49]): el método de Adams-Moulton de un paso (método del Trapecio) y el segundo método de la familia BDF (Backward Differentiation Formulas), de dos pasos. El método de dos pasos es semi-Lagrangiano, mientras que con el método de un paso consideramos formulaciones Lagrangianas y semi-Lagrangianas. En realidad los métodos semi-Lagrangianos de características pueden ser interpretados como métodos Lagrangianos donde la transformación es reiniciada a la identidad en cada paso de tiempo de la discretización. El método de dos pasos se propone y analiza en [40] para las ecuaciones de convección-difusión unidimensionales, y en [22] para las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles.

La desventaja que presentan los métodos Lagrangianos es que el Jacobiano de la transformación se vuelve mal condicionado para tiempos relativamente grandes (ver [29]). Generalmente, en el análisis, esta degeneración se omite considerando intervalos de tiempo pequeños. En [29] se analizan dos métodos, uno Lagrangiano y otro semi-Lagrangiano para problemas de convección-difusión. Se obtienen estimaciones de error para el método Lagrangiano semidiscretizado en espacio utilizando elementos finitos; y también para el análogo semi-Lagrangiano discretizado en tiempo y espacio usando un método de elementos finitos

discontinuos. Las estimaciones obtenidas están expresadas en términos de operadores de proyección con constantes independientes de la difusión cuando la velocidad es calculada exactamente. En [27] y [28] se analiza el método de Galerkin discontinuo para ecuaciones parabólicas. Se obtienen estimaciones de error simétricas expresadas en función de los operadores de proyección. El marco en el que se desarrolla la teoría es bastante general; por ejemplo, se permiten diferentes espacios discretos en cada paso de tiempo y el operador espacial puede depender de la variable temporal. En particular, los resultados obtenidos pueden aplicarse a las ecuaciones de convección-difusión en formulación semi-Lagrangiana.

El gran inconveniente que presentan los métodos de características es que para su implementación práctica es necesario utilizar fórmulas de cuadratura, lo que produce en algunos casos la pérdida de la estabilidad incondicional (ver, por ejemplo, [55], [66], [77]) y la aparición de nuevos términos en las estimaciones de error (ver [55], [63]). En la bibliografía se estudia la influencia de las fórmulas de cuadratura mayoritariamente para el método clásico de Lagrange-Galerkin con elementos finitos lineales. Concretamente, en [55] se prueba que para las fórmulas de Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto (de más de tres puntos), Radau y Newton-Cotes el método resulta condicionalmente inestable aplicado a la ecuación de convección lineal. Este resultado se extiende en [77] a la ecuación de convección-difusión lineal y en [66] a más tipos de fórmulas de cuadratura. Tanto para la ecuación de convección como para la ecuación de convección-difusión las fórmulas de Gauss-Lobatto son las que proporcionan los métodos más estables. Sin embargo, sólo la regla del trapecio conserva la estabilidad incondicional. En [42] se hace un análisis de Fourier para el método clásico y el método de dos pasos, combinados con fórmulas de cuadratura de Gauss-Legendre y aplicados a la ecuación de convección lineal unidimensional. Los resultados que se obtienen reflejan que el método de dos pasos es más inestable que el clásico. En [78] se muestra experimentalmente que el método de Crank-Nicholson es más robusto, respecto al error de integración numérica, que el método de primer orden. En [20] se extiende el análisis obteniendo resultados de estabilidad incondicional; para ello se desarrolla un análisis de Fourier.

Esta parte de la tesis consta de tres capítulos cuyos contenidos se resumen a continuación.

En el *Capítulo 1* en primer lugar planteamos un problema de Cauchy en un dominio acotado e introducimos la notación empleada. Proponemos dos formulaciones variacionales que generalizan a la clásica semi-Lagrangiana y con las que es posible obtener a la vez métodos Lagrangianos y semi-Lagrangianos. Un caso particular de la segunda, se utiliza para obtener el método de características enteramente Lagrangiano que se estudia en esta parte. Presentamos las semidiscretizaciones temporales de diferentes métodos de características semi-Lagrangianos y Lagrangianos. Deducimos algunas propiedades que satisfacen el movimiento, que utilizaremos en el Capítulo 3 para obtener las estimaciones de error temporal. Proponemos fórmulas numéricas para aproximar las curvas características y obtenemos propiedades análogas a las que se tienen para el movimiento.

En el *Capítulo 2* obtenemos dos resultados de estabilidad del método de Crank-Nicholson Lagrangiano para un problema de convección-difusión con difusión degenerada: uno para la solución discreta en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$, es decir, norma infinito discreta en tiempo y L^2 en espacio; y otro para la solución discreta en norma $l^\infty(L^2(\Gamma^R))$ y para su gradiente en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$. Dichas cotas dependen únicamente de los datos del problema y son independientes de Δt . Concretamente para la norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ las constantes son independientes del coeficiente (tensorial) de difusión.

En el *Capítulo 3* probamos la convergencia en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ del método semidiscretizado en tiempo con orden $O(\Delta t^2)$ y con constantes que se mantienen acotadas cuando el coeficiente de difusión tiende a cero. También probamos la convergencia para los gradientes del error en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ con orden $O(\Delta t^2)$.

En el *Capítulo 4* en primer lugar proponemos una discretización espacial utilizando el método de ele-

mentos finitos. En segundo lugar, analizamos el método totalmente discretizado obteniendo convergencia en norma $l^\infty(H^1(\Omega))$ de orden $O(\Delta t^2 + h^k)$. Concretamente, en primer lugar obtenemos una acotación para la norma $l^\infty(L^2(\Omega))$, con constantes que se mantienen acotadas en el límite hipérbolico; y posteriormente se obtiene la estimación para el gradiente del error. Por último, presentamos los resultados numéricos obtenidos con diferentes métodos de características. Verificamos los órdenes de convergencia conseguidos para el método de Crank-Nicholson Lagrangiano.

Capítulo 1

Discretización temporal de las ecuaciones de convección-difusión utilizando métodos de características

1.1. Introducción

En este capítulo, en primer lugar planteamos un problema de Cauchy de convección-difusión en un dominio acotado e introducimos la notación empleada, tomada en parte de la mecánica de medios continuos (ver, por ejemplo, [46]).

Una posible estrategia para la discretización temporal de dicho problema, que proporcione aproximaciones precisas y estables, es utilizar el método de características. El método clásico de características es semi-Lagrangiano y de primer orden en tiempo. Existe numerosa bibliografía que estudia matemáticamente el método clásico de características combinado elementos finitos, para resolver ecuaciones de convección-difusión (ver por ejemplo, [38], [63], [77]). En este trabajo estamos interesados en obtener métodos de características de segundo orden en tiempo.

En segundo lugar, con objeto de presentar de forma rigurosa los distintos métodos de características, proponemos dos formulaciones variacionales que generalizan a la clásica semi-Lagrangiana y con las que es posible obtener a la vez métodos Lagrangianos y semi-Lagrangianos. Un caso particular de la segunda, se utiliza para obtener el método de características enteramente Lagrangiano que se estudia en este trabajo. Presentamos las semidiscretizaciones temporales de diferentes métodos de características semi-Lagrangianos y Lagrangianos.

Por último, introducimos el problema de Cauchy que verifican las trayectorias del movimiento. A partir de dicho problema y utilizando desarrollos de Taylor se deducen algunas propiedades que satisfacen el movimiento, que utilizaremos en el Capítulo 3 para obtener las estimaciones de error temporal. Proponemos fórmulas numéricas para aproximar las curvas características y obtenemos propiedades análogas a las que se tienen para el movimiento.

1.2. Problema de Cauchy y notaciones

Sea \mathcal{E} un espacio afín euclídeo de dimensión d ($d = 2, 3$) y $(\mathcal{V}, |\cdot|)$ el espacio vectorial euclídeo asociado. Sea T una constante positiva. Suponemos que $\Omega \subset \mathcal{E}$ es un dominio (es decir, abierto y conexo) y acotado, con frontera Lipschitz, Γ dividida en dos partes $\Gamma = \Gamma^D \cup \Gamma^R$ con $\text{med}(\Gamma^D \cap \Gamma^R) = 0$, y que $X_e : \overline{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathcal{E}$ es un movimiento de $\overline{\Omega}$ en el sentido de Gurtin [46], es decir $X_e \in \mathbf{C}^3(\overline{\Omega} \times [0, T])$ y para cada $t \in [0, T]$, $X_e(\cdot, t)$ es una función inyectiva que verifica

$$\det F(\cdot, t) > 0, \quad (1.1)$$

siendo F el gradiente del movimiento. La hipótesis de regularidad de X_e se podrá relajar.

Observación 1.2.1. En [46], se considera un dominio más general, concretamente Ω puede ser no acotado, por lo que se incluye como hipótesis que para cada $t \in [0, T]$, $X_e(\overline{\Omega}, t)$ es la clausura de un conjunto abierto y conexo en \mathcal{E} (ver por ejemplo [46] página 54). Esta propiedad se cumple automáticamente si Ω es acotado. En efecto, en primer lugar, se comprueba fácilmente la siguiente propiedad

$$X_e(\overline{\Omega}, t) = \overline{X_e(\Omega, t)} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.2)$$

Además, se verifica que $X_e(\Omega, t)$ es un conjunto abierto en \mathcal{E} (ver [6] Teorema 13.3) y por la continuidad de $X_e(\cdot, t)$ también es conexo, puesto que Ω lo es.

Llamamos $\Omega_t = X_e(\Omega, t)$, $\Gamma_t = X_e(\Gamma, t)$, $\Gamma_t^D = X_e(\Gamma^D, t)$ y $\Gamma_t^R = X_e(\Gamma^R, t)$, para cada $t \in [0, T]$. Suponemos $\Omega_0 = \Omega$. Introducimos la trayectoria del movimiento

$$\mathcal{T} := \{(x, t) : x \in \overline{\Omega}_t, t \in [0, T]\}.$$

También será útil introducir el conjunto

$$\mathcal{O} := \bigcup_{t \in [0, T]} \overline{\Omega}_t. \quad (1.3)$$

A continuación recordamos algunas propiedades que verifica X_e . En primer lugar, se cumplen

$$\begin{aligned} \Omega_t &= \text{int}(X_e(\overline{\Omega}, t)), \\ \Gamma_t &= \partial X_e(\overline{\Omega}, t), \end{aligned}$$

la segunda igualdad implica que los puntos de la frontera Γ permanecen sobre la frontera para todo tiempo $t \in [0, T]$. Además, como $X_e(\cdot, t)$ es inyectiva, su inversa que denotamos por $P(\cdot, t)$ existe, concretamente

$$P(\cdot, t) : \overline{\Omega}_t \rightarrow \overline{\Omega}, \quad (1.4)$$

tal que

$$X_e(P(x, t), t) = x, \quad P(X_e(p, t), t) = p \quad \forall (x, t) \in \mathcal{T}, \quad \forall (p, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]. \quad (1.5)$$

La función

$$P : \mathcal{T} \rightarrow \overline{\Omega},$$

así definida la llamaremos aplicación de referencia de X_e . Además, se puede comprobar que $P(\cdot, t) \in \mathbf{C}^3(\mathcal{T})$ (ver [46] pp. 65 – 66). También será útil introducir la descripción espacial de la velocidad asociada al movimiento X_e , que denotaremos por \mathbf{v} , concretamente

$$\mathbf{v} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{V}, \quad (1.6)$$

tal que

$$\mathbf{v}(x, t) := \dot{X}_e(P(x, t), t) \quad \forall (x, t) \in \mathcal{T}. \quad (1.7)$$

Teniendo en cuenta que $X_e \in \mathbf{C}^3(\bar{\Omega} \times [0, T])$ y $P \in \mathbf{C}^3(\mathcal{T})$ se deduce que $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^2(\mathcal{T})$.

Consideramos el siguiente problema mixto de valores iniciales y de contorno.

Problema Fuerte: Encontrar una función $\phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\rho(x) \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) + \rho(x) \mathbf{v}(x, t) \cdot \text{grad } \phi(x, t) - \text{div}(A(x) \text{grad } \phi(x, t)) = f(x, t),$$

para $x \in \Omega_t$ y $t \in (0, T)$,

$$\phi(\cdot, t) = \phi_D(\cdot, t) \quad \text{en } \Gamma_t^D, \quad (1.8)$$

$$\alpha \phi(\cdot, t) + A(\cdot) \text{grad } \phi(\cdot, t) \cdot \mathbf{n}(\cdot, t) = g(\cdot, t) \quad \text{en } \Gamma_t^R,$$

para $t \in (0, T)$,

$$\phi(x, 0) = \phi^0(x) \quad \text{en } \bar{\Omega}.$$

En las ecuaciones, $A : \mathcal{O} \rightarrow \text{Sym}$ denota el coeficiente (tensorial) de difusión siendo Sym el espacio de los tensores¹ simétricos, $\mathbf{v} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{V}$ es la velocidad, $\rho : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi^0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi_D(\cdot, t) : \Gamma_t^D \rightarrow \mathbb{R}$ y $g(\cdot, t) : \Gamma_t^R \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in (0, T)$, son funciones dadas y $\mathbf{n}(\cdot, t)$ es el vector normal unitario exterior a Γ_t .

Observación 1.2.2. Para evitar confusiones entre las expresiones que involucran gradientes y derivadas temporales en coordenadas Lagrangianas o Eulerianas, introducimos la siguiente notación (ver [46]).

- Los puntos de la configuración de referencia $\bar{\Omega}$ se denotan por p y los puntos espaciales, correspondientes a las configuraciones deformadas $\bar{\Omega}_t$ con $t > 0$, por x .
- Un campo material (respectivamente, espacial) es una función con dominio $\bar{\Omega} \times [0, T]$ (respectivamente, \mathcal{T}).
- La descripción material de un campo escalar, vectorial o tensorial espacial Ψ se denota por Ψ_m y se define para cada $(p, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]$ por

$$\Psi_m(p, t) = \Psi(X_e(p, t), t). \quad (1.9)$$

- La descripción espacial de un campo escalar, vectorial o tensorial material Φ se denota por Φ_s y se define para cada $(x, t) \in \mathcal{T}$ por

$$\Phi_s(x, t) = \Phi(P(x, t), t), \quad (1.10)$$

siendo P la aplicación de referencia de X_e .

¹En este trabajo fundamentalmente nos referiremos a los tensores de orden dos que serán identificados a endomorfismos de \mathcal{V} . El espacio de tensores se denotará por Lin .

- Si φ es un campo escalar espacial (respectivamente, material) diferenciable se tiene que la diferencial de φ con respecto al primer argumento en (x, t) (respectivamente, en (p, t)), que denotamos por $D\varphi(x, t)$ (respectivamente, $D\varphi(p, t)$), es una aplicación lineal de \mathcal{V} en \mathbb{R} . Por tanto, dicha diferencial tiene asociada un único vector de \mathcal{V} que denotamos por $\text{grad } \varphi(x, t)$ (respectivamente, $\nabla \varphi(p, t)$) y que llamamos gradiente de φ en (x, t) (respectivamente, en (p, t)), que verifica

$$D\varphi(x, t)\mathbf{z} = \text{grad } \varphi(x, t) \cdot \mathbf{z} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{V},$$

respectivamente,

$$D\varphi(p, t)\mathbf{z} = \nabla \varphi(p, t) \cdot \mathbf{z} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{V}.$$

- Si \mathbf{w} es un campo vectorial espacial (respectivamente, material) diferenciable, se tiene que la diferencial con respecto al primer argumento de \mathbf{w} en (x, t) (respectivamente, en (p, t)), es una aplicación lineal de \mathcal{V} en \mathcal{V} , por tanto un tensor. En este caso $\text{grad } \mathbf{w}(x, t)$ (respectivamente, $\nabla \mathbf{w}(p, t)$) representa dicha diferencial, por lo que es un elemento de Lin .
- Si \mathbf{w} es un campo vectorial espacial (respectivamente, material) diferenciable denotamos por $\text{div } \mathbf{w}$ (respectivamente, $\text{Div } \mathbf{w}$) la divergencia de \mathbf{w} con respecto al primer argumento.
- Si ϑ es un campo escalar, vectorial o tensorial espacial (respectivamente, material) diferenciable denotamos por ϑ' (respectivamente, $\dot{\vartheta}$) la derivada de ϑ con respecto al segundo argumento.
- Si Ψ es un campo escalar, vectorial o tensorial espacial diferenciable, $\dot{\Psi}$ denota la derivada material con respecto al tiempo de Ψ , es decir,

$$\dot{\Psi}(x, t) := \dot{\Psi}_m(p, t)|_{p=P(x, t)} = \frac{d}{dt} \Psi(X_e(p, t), t)|_{p=P(x, t)}, \quad (1.11)$$

para todo $(x, t) \in \mathcal{T}$. Nótese que si ψ es un campo escalar espacial diferenciable, aplicando la regla de la cadena (ver demostración del Lema 1.2.1) se deduce que

$$\dot{\psi} = \psi' + \text{grad } \psi \cdot \mathbf{v}.$$

Análogamente, si \mathbf{u} es un campo vectorial espacial diferenciable se verifica

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}' + \text{grad } \mathbf{u} \mathbf{v}.$$

Dado $\tau \in [0, T]$ se define el movimiento relativo a la configuración en tiempo τ como la aplicación

$$(X_e)_\tau : \overline{\Omega}_\tau \times [0, T] \longrightarrow \mathcal{E},$$

definida por

$$(X_e)_\tau(y, t) := X_e(P(y, \tau), t) \quad \forall (y, t) \in \overline{\Omega}_\tau \times [0, T]. \quad (1.12)$$

Por tanto, $(X_e)_\tau(y, \cdot)$ representa la trayectoria descrita por un punto material que ocupa en el instante τ la posición y . Dado un campo escalar, vectorial o tensorial espacial Ψ se introduce la aplicación Ψ_τ definida en $\overline{\Omega}_\tau \times [0, T]$ por

$$\Psi_\tau(y, t) := \Psi((X_e)_\tau(y, t), t) \quad \forall (y, t) \in \overline{\Omega}_\tau \times [0, T]. \quad (1.13)$$

Análogamente, para una aplicación escalar, vectorial o tensorial Ψ definida en \mathcal{O} se introduce la aplicación Ψ_τ definida en $\overline{\Omega}_\tau \times [0, T]$ por

$$\Psi_\tau(y, t) := \Psi((X_e)_\tau(y, t)) \quad \forall (y, t) \in \overline{\Omega}_\tau \times [0, T], \quad (1.14)$$

además, para $\tau = 0$ escribiremos

$$\Psi_m(p, t) := \Psi(X_e(p, t)) \quad \forall (p, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]. \quad (1.15)$$

En lo que sigue \mathcal{A} e $Y(\mathcal{A})$ denotan dos subconjuntos de \mathcal{E} abiertos, conexos, acotados y con frontera Lipschitz. Además, a lo largo de este apartado, dado $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, $\varphi : \mathcal{F} \subset \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{w} : \mathcal{F} \subset \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$ y $G : \mathcal{F} \subset \mathcal{E} \rightarrow Lin$ aplicaciones diferenciables, escribimos $\nabla\varphi(c) \in \mathcal{V}$, $\nabla\mathbf{w}(c) \in Lin$, $\text{div } \mathbf{w}(c) \in \mathbb{R}$ y $\text{div } G(c) \in \mathcal{V}$ para denotar, respectivamente, el gradiente de φ , el de \mathbf{w} , la divergencia de \mathbf{w} y la de G en el punto c . Concretamente, dado $c \in \mathcal{F}$, se verifican

$$\begin{aligned} D\varphi(c)\mathbf{z} &= \nabla\varphi(c) \cdot \mathbf{z} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{V}, \\ D\mathbf{w}(c)\mathbf{z} &= \nabla\mathbf{w}(c)\mathbf{z} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{V}, \\ \text{div } \mathbf{w}(c) &= \text{tr } \nabla\mathbf{w}(c), \\ (\text{div } G(c)) \cdot \mathbf{z} &= \text{div } (G^T \mathbf{z})(c) \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Algunos espacios funcionales

Recordamos los espacios de Lebesgue $L^r(\mathcal{A})$ y de Sobolev $W^{m,r}(\mathcal{A})$, siendo $1 \leq r \leq \infty$, (ver [4]):

$$L^r(\mathcal{A}) := \left\{ \varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible, } \int_{\mathcal{A}} |\varphi|^r < \infty, 1 \leq r < \infty \right\}, \quad (1.16)$$

$$L^\infty(\mathcal{A}) := \left\{ \varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible, } |\varphi| \leq K \text{ casi por doquier en } \mathcal{A} \right\}, \quad (1.17)$$

$$W^{m,r}(\mathcal{A}) := \left\{ \varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible, } \partial_\beta \varphi \in L^r(\mathcal{A}), \beta \in \mathbb{N}^d, 0 \leq |\beta| \leq m, 1 \leq r \leq \infty \right\}, \quad (1.18)$$

dotados, respectivamente, de las normas usuales $\|\cdot\|_{0,r,\mathcal{A}}$ y $\|\cdot\|_{m,r,\mathcal{A}}$

$$\|\varphi\|_{0,r,\mathcal{A}} := \left(\int_{\mathcal{A}} |\varphi|^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad 1 \leq r < \infty, \quad (1.19)$$

$$\|\varphi\|_{0,\infty,\mathcal{A}} := \text{ess sup}_{x \in \mathcal{A}} |\varphi(x)| \quad (1.20)$$

$$\|\varphi\|_{m,r,\mathcal{A}} := \left(\sum_{|\beta| \leq m} \|\partial_\beta \varphi\|_{0,r,\mathcal{A}}^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad 1 \leq r < \infty, \quad (1.21)$$

$$\|\varphi\|_{m,\infty,\mathcal{A}} := \max_{|\beta| \leq m} \{\|\partial_\beta \varphi\|_{0,\infty,\mathcal{A}}\}, \quad (1.22)$$

siendo, $|\beta| := |(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d)| = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_d$ y $\partial_\beta \varphi$ la derivada parcial

$$\partial_\beta \varphi := \frac{\partial^{|\beta|} \varphi}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_d^{\beta_d}}.$$

También introducimos las seminormas $|\cdot|_{m,r,\mathcal{A}}$

$$|\varphi|_{m,r,\mathcal{A}} := \left(\sum_{|\beta|=m} \|\partial_\beta \varphi\|_{0,r,\mathcal{A}}^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad 1 \leq r < \infty, \quad (1.23)$$

$$|\varphi|_{m,\infty,\mathcal{A}} := \max_{|\beta|=m} \{\|\partial_\beta \varphi\|_{0,\infty,\mathcal{A}}\}. \quad (1.24)$$

Para $r = 2$, consideramos el espacio de Hilbert $L^2(\mathcal{A})$ dotado del producto escalar usual $\langle \cdot, \cdot \rangle_{0,\mathcal{A}}$ que induce la norma $\|\cdot\|_{0,2,\mathcal{A}}$ y los espacios $H^m(\mathcal{A}) = W^{m,2}(\mathcal{A})$ con la norma usual $\|\cdot\|_{m,2,\mathcal{A}}$. Se denota por $H_{\Gamma_t^D}^1(\Omega_t)$ el subespacio cerrado de $H^1(\Omega_t)$ definido por

$$H_{\Gamma_t^D}^1(\Omega_t) := \left\{ \varphi \in H^1(\Omega_t), \varphi|_{\Gamma_t^D} = 0 \right\}. \quad (1.25)$$

Dado $m \in \mathbb{N}$, consideramos el espacio $C^m(\overline{\Omega} \times [0, T])$, dotado de la norma

$$\|\varphi\|_{C^m(\overline{\Omega} \times [0, T])} := \max_{|\beta| \leq m} \left\{ \max_{(p,t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]} |\partial_\beta \varphi(p, t)| \right\}, \quad (1.26)$$

siendo, $|\beta| := |(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d, \beta_{d+1})| = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_d + \beta_{d+1}$ y $\partial_\beta \varphi$ la derivada parcial

$$\partial_\beta \varphi := \frac{\partial^{|\beta|} \varphi}{\partial p_1^{\beta_1} \partial p_2^{\beta_2} \dots \partial p_d^{\beta_d} \partial t^{\beta_{d+1}}}.$$

Si X es un espacio funcional de Banach; denotamos por $C^m(X)$ y $H^m(X)$ los espacios $C^m([0, T], X)$ y $H^m((0, T), X)$, respectivamente, dotados de las normas

$$\|\varphi\|_{C^m(X)} := \max_{t \in [0, T]} \left\{ \max_{j=0, \dots, m} \|\varphi^{(j)}(t)\|_X \right\}, \quad \|\varphi\|_{H^m(X)} := \left(\int_0^T \sum_{j=0}^m \|\varphi^{(j)}(t)\|_X^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.27)$$

donde $\varphi^{(j)}$ denota la derivada j -ésima de φ con respecto a la variable temporal.

Cuando las aplicaciones tengan como conjunto de llegada el espacio vectorial \mathcal{V} , escribiremos los espacios en **negrita**, es decir, $\mathbf{L}^r(\mathcal{A})$, $\mathbf{W}^{m,r}(\mathcal{A})$, $\mathbf{H}^m(\mathcal{A})$ y $\mathbf{C}^m(\overline{\Omega} \times [0, T])$. En particular, para $r = \infty$ y $m = 1$ nos interesa considerar en el espacio vectorial $\mathbf{W}^{1,\infty}(\mathcal{A})$ una norma equivalente a la usual $\|\cdot\|_{1,\infty,\mathcal{A}}$ que, por simplicidad, denotaremos de la misma manera; concretamente,

$$\|\mathbf{w}\|_{1,\infty,\mathcal{A}} := \max \{ \|\mathbf{w}\|_{0,\infty,\mathcal{A}}, \|\operatorname{div} \mathbf{w}\|_{0,\infty,\mathcal{A}}, \|\nabla \mathbf{w}\|_{0,\infty,\mathcal{A}} \}, \quad (1.28)$$

siendo

$$\|\mathbf{w}\|_{0,\infty,\mathcal{A}} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathcal{A}} |\mathbf{w}(x)|, \quad (1.29)$$

$$\|\nabla \mathbf{w}\|_{0,\infty,\mathcal{A}} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathcal{A}} \|\nabla \mathbf{w}(x)\|_2, \quad (1.30)$$

donde $\|\cdot\|_2$ denota la norma en el espacio de tensores inducida por la norma vectorial de \mathcal{V} . Análogamente, cuando las aplicaciones tengan como conjunto de llegada el espacio \mathbf{Lin} , escribiremos, $\mathbf{L}^r(\mathcal{A})$, $\mathbf{W}^{m,r}(\mathcal{A})$, $\mathbf{H}^m(\mathcal{A})$ y $\mathbf{C}^m(\overline{\Omega} \times [0, T])$.

Observación 1.2.3. Por definición, si φ es un campo material escalar y $t \in [0, T]$, se tiene

$$\|\varphi_s(\cdot, t)\|_{0,2,\Omega_t}^2 := \int_{\Omega_t} \varphi_s^2(x, t) dx, \quad (1.31)$$

$$\|\varphi_s(\cdot, t)\|_{1,2,\Omega_t}^2 := \int_{\Omega_t} |\operatorname{grad} \varphi_s(x, t)|^2 dx. \quad (1.32)$$

Aplicando el cambio de variable $x = X_e(p, t)$ en las integrales anteriores, obtenemos

$$\|\varphi_s(\cdot, t)\|_{0,2,\Omega_t}^2 = \int_{\Omega} \varphi^2(p, t) J(p, t) dp, \quad (1.33)$$

$$\|\varphi_s(\cdot, t)\|_{1,2,\Omega_t}^2 := \int_{\Omega} |F^{-T}(p, t) \nabla \varphi(p, t)|^2 J(p, t) dp, \quad (1.34)$$

siendo $J = \det F$ y F el gradiente del movimiento.

Resultados preliminares I

A continuación enunciamos y probamos algunos lemas que utilizaremos en la Sección 1.3 para obtener formulaciones débiles del problema (1.8).

Lema 1.2.1. *Sea $\psi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo tal que $\psi \in H^1(\mathcal{T})$, entonces, se verifica*

$$\dot{\psi}(x, t) = \psi'(x, t) + \text{grad}_x \psi(x, t) \cdot \mathbf{v}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \psi_\tau(y, t)|_{y=(X_e)_t(x, \tau)} \text{ c.p.d. } (x, t) \in \mathcal{T}. \quad (1.35)$$

DEMOSTRACIÓN. Conviene recordar la definición de la derivada total de un campo espacial ψ

$$\dot{\psi}(x, t) := \dot{\psi}_m(p, t)|_{p=P(x, t)} := \frac{d}{dt} \psi(X_e(p, t), t)|_{p=P(x, t)}.$$

Entonces, utilizando la regla de la cadena y la definición de las curvas características, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \psi(X_e(p, t), t)|_{p=P(x, t)} = \psi'(x, t) + \text{grad}_x \psi(x, t) \cdot \mathbf{v}(x, t),$$

que es la primera igualdad de (1.35). Veamos a continuación que también se cumple la segunda igualdad. Por definición, se tiene

$$\psi_\tau(y, t) := \psi(X_e(P(y, \tau), t), t).$$

Entonces, utilizando la regla de la cadena y la definición de las curvas características, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \psi(X_e(P(y, \tau), t), t) = \psi'(X_e(P(y, \tau), t), t) + \text{grad}_x \psi(X_e(P(y, \tau), t), t) \cdot \mathbf{v}(X_e(P(y, \tau), t), t).$$

Por lo tanto, sustituyendo para $y = (X_e)_t(x, \tau) := X_e(P(x, t), \tau)$, teniendo en cuenta que

$$X_e(P(y, \tau), t) = X_e(P(X_e(P(x, t), \tau), \tau), t) = X_e(P(x, t), t) = x,$$

resulta

$$\frac{d}{dt} \psi(X_e(P(y, \tau), t), t)|_{y=(X_e)_t(x, \tau)} = \psi'(x, t) + \text{grad}_x \psi(x, t) \cdot \mathbf{v}(x, t),$$

de donde se tiene el resultado. \square

Lema 1.2.2. *Sea $Y : \overline{\mathcal{A}} \longrightarrow \overline{Y(\mathcal{A})}$, $Y \in \mathbf{C}^2(\overline{\mathcal{A}})$, una aplicación invertible. Supongamos que $\det G > 0$, por lo que $G^{-1} \in \mathbf{C}^1(\overline{\mathcal{A}})$, siendo $G = \nabla Y$. Entonces,*

$$\begin{aligned} & \int_{Y(\mathcal{A})} \text{div}_z (B(z) \nabla_z \varphi(z)) dz \\ &= \int_{\mathcal{A}} \text{div}_q [G^{-1}(q) B(Y(q)) G^{-T}(q) \nabla_q (\varphi \circ Y)(q) \det G(q)] dq, \end{aligned} \quad (1.36)$$

siendo B una aplicación tensorial, tal que $B \in \mathbb{H}^1(Y(\mathcal{A}))$ y $\varphi \in H^2(Y(\mathcal{A}))$ una aplicación escalar.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, por el teorema de Gauss, se verifica

$$\int_{Y(\mathcal{A})} \text{div}_z (B(z) \nabla_z \varphi(z)) dz = \int_{\partial Y(\mathcal{A})} B(z) \nabla_z \varphi(z) \cdot \mathbf{n}(z) dA_z,$$

donde \mathbf{n} es el vector unitario exterior a $\partial Y(\mathcal{A})$. Aplicando el cambio de variable $z = Y(q)$ en la segunda integral y usando la regla de la cadena, se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{\partial Y(\mathcal{A})} B(z) \nabla_z \varphi(z) \cdot \mathbf{n}(z) dA_z \\ &= \int_{\partial \mathcal{A}} B(Y(q)) \nabla_z \varphi(Y(q)) \cdot \det G(q) G^{-T}(q) \mathbf{m}(q) dA_q \\ &= \int_{\partial \mathcal{A}} G^{-1}(q) B(Y(q)) G^{-T}(q) \nabla_q (\varphi \circ Y)(q) \det G(q) \cdot \mathbf{m}(q) dA_q, \end{aligned}$$

siendo \mathbf{m} el vector unitario exterior a $\partial \mathcal{A}$. Finalmente, utilizando el teorema de Gauss se obtiene (1.36). \square

Lema 1.2.3. Sea $Y : \overline{\mathcal{A}} \rightarrow \overline{Y(\mathcal{A})}$, $Y \in \mathbf{C}^2(\overline{\mathcal{A}})$, una aplicación invertible. Supongamos que $\det G > 0$, por lo que $G^{-1} \in \mathbf{C}^1(\overline{\mathcal{A}})$, siendo $G = \nabla Y$. Entonces, si denotamos por $q = Y^{-1}(z)$, se cumple

$$\operatorname{div}_z (B \nabla_z \varphi)(z) = \left(\operatorname{div}_q [G^{-1} B \circ Y G^{-T} \nabla_q (\varphi \circ Y) \det G] \frac{1}{\det G} \right) (q), \quad (1.37)$$

casi por doquier $z \in Y(\mathcal{A})$, siendo B una aplicación tensorial, tal que $B \in \mathbb{H}^1(Y(\mathcal{A}))$ y $\varphi \in H^2(Y(\mathcal{A}))$ una aplicación escalar.

DEMOSTRACIÓN. Por el lema previo, dado $z_0 \in Y(\mathcal{A})$, se verifica

$$\begin{aligned} & \int_{B(z_0, \lambda)} \operatorname{div}_z (B(z) \nabla_z \varphi(z)) dz \\ &= \int_{Y^{-1}(B(z_0, \lambda))} \operatorname{div}_q [G^{-1}(q) B(Y(q)) G^{-T}(q) \nabla_q (\varphi \circ Y)(q) J(q)] dq \quad \forall \lambda > 0, \end{aligned}$$

siendo $J = \det G$. Aplicando el cambio de variable $q = Y^{-1}(z)$ en la integral a la derecha de la igualdad, resulta

$$\begin{aligned} & \int_{B(z_0, \lambda)} \operatorname{div}_z (B \nabla_z \varphi) dz \\ &= \int_{B(z_0, \lambda)} \operatorname{div}_q (G^{-1} \circ Y^{-1} B G^{-T} \circ Y^{-1} (\nabla_q (\varphi \circ Y)) \circ Y^{-1} J \circ Y^{-1}) \frac{1}{J \circ Y^{-1}} dz, \end{aligned}$$

para todo $\lambda > 0$. Por último, utilizando el análogo al Teorema de Localización para funciones de L^r , $1 \leq r \leq \infty$, (ver [73] página 5) se obtiene el resultado. \square

Lema 1.2.4. Sea $G : \overline{\mathcal{A}} \rightarrow \operatorname{Lin}^+$, $G \in \mathbf{C}^1(\overline{\mathcal{A}})^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{A}} \operatorname{div}_q [G^{-1}(q) \mathbf{w}(q) \det G(q)] \frac{1}{\det G(q)} \varphi(q) dq \\ &= \int_{\partial \mathcal{A}} G^{-T}(q) \mathbf{m}(q) \cdot \mathbf{w}(q) \varphi(q) dA_q - \int_{\mathcal{A}} G^{-1}(q) \mathbf{w}(q) \cdot \nabla_q \varphi(q) dq \\ &\quad - \int_{\mathcal{A}} \operatorname{div}_q G^{-T}(q) \cdot \mathbf{w}(q) \varphi(q) dq, \end{aligned} \quad (1.38)$$

siendo $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\mathcal{A})$ una aplicación vectorial, $\varphi \in H^1(\mathcal{A})$ una aplicación escalar y \mathbf{m} el vector unitario normal a $\partial \mathcal{A}$ dirigido hacia el exterior de \mathcal{A} .

²Denotamos por Lin^+ el conjunto de los tensores con determinante positivo.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, aplicando la fórmula usual de Green, se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{A}} \operatorname{div}_q [G^{-1}(q) \mathbf{w}(q) \det G(q)] \frac{1}{\det G(q)} \varphi(q) dq \\ &= \int_{\partial \mathcal{A}} G^{-T}(q) \mathbf{m}(q) \cdot \mathbf{w}(q) \varphi(q) dA_q \\ & - \int_{\mathcal{A}} G^{-1}(q) \mathbf{w}(q) \det G(q) \cdot \nabla_q \left(\frac{\varphi(q)}{\det G(q)} \right) dq. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Nótese que se verifica (igualdad de Piola)

$$\operatorname{div}_q (\det G(q) G^{-T}(q)) = 0,$$

para $q \in \mathcal{A}$. Entonces, para $\zeta \in H^1(\mathcal{A})$, se cumple

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_q [\zeta(q) \det G(q) G^{-T}(q)] &= \zeta(q) \operatorname{div}_q (\det G(q) G^{-T}(q)) \\ & + \det G(q) G^{-T}(q) \nabla_q \zeta(q) \\ &= \det G(q) G^{-T}(q) \nabla_q \zeta(q), \end{aligned} \quad (1.40)$$

casi por doquier $q \in \mathcal{A}$. Además, también se verifica

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_q [\zeta(q) \det G(q) G^{-T}(q)] &= \zeta(q) \det G(q) \operatorname{div}_q G^{-T}(q) \\ & + G^{-T}(q) \nabla_q [\det G(q) \zeta(q)], \end{aligned} \quad (1.41)$$

casi por doquier $q \in \mathcal{A}$. Teniendo en cuenta (1.40) y (1.41) se deduce

$$\begin{aligned} \det G(q) G^{-T}(q) \nabla_q \zeta(q) &= \zeta(q) \det G(q) \operatorname{div}_q G^{-T}(q) \\ & + G^{-T}(q) \nabla_q [\det G(q) \zeta(q)], \end{aligned} \quad (1.42)$$

casi por doquier $q \in \mathcal{A}$. Eligiendo en esta igualdad la aplicación $\zeta = \varphi / \det G$, se obtiene

$$\begin{aligned} \det G(q) G^{-T}(q) \nabla_q \left(\frac{\varphi(q)}{\det G(q)} \right) &= \varphi(q) \operatorname{div}_q G^{-T}(q) \\ & + G^{-T}(q) \nabla_q \varphi(q), \end{aligned} \quad (1.43)$$

casi por doquier $q \in \mathcal{A}$. Introduciendo esta expresión en (1.39) se obtiene el resultado. \square

Resultados preliminares II

Será conveniente introducir con detalle el concepto de gradiente de una aplicación tensorial diferenciable y algunas definiciones y propiedades. En adelante, denotamos por $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \operatorname{Lin})$ el conjunto de las aplicaciones lineales de \mathcal{V} en Lin , por $\mathcal{BL}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V})$ el de las aplicaciones bilineales de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ en \mathcal{V} y por $\mathcal{L}_3(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ el de las aplicaciones trilineales de $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ en \mathbb{R} . En el espacio $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \operatorname{Lin})$ consideramos la siguiente norma

$$|||\mathbf{S}||| := \max_{\mathbf{z} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{S}(\mathbf{z})\|_2}{|\mathbf{z}|} = \max_{\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{S}(\mathbf{z})(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{z}| |\mathbf{w}| |\mathbf{u}|} = \max_{\substack{\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \\ |\mathbf{z}|=|\mathbf{w}|=|\mathbf{u}|=1}} \mathbf{S}(\mathbf{z})(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$$

para $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \operatorname{Lin})$. Para una aplicación $\mathbf{S} : \mathcal{A} \subset \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V}, \operatorname{Lin})$ definida casi por doquier y acotada consideramos la siguiente norma

$$|||\mathbf{S}|||_{0,\infty,\mathcal{A}} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathcal{A}} |||\mathbf{S}(x)|||.$$

Definición 1.2.1. Dados tres vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}$ definimos su producto tensorial como

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \text{Lin}),$$

tal que

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c})(\mathbf{z}) := (\mathbf{c} \cdot \mathbf{z})(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{V},$$

siendo $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ el producto tensorial de \mathbf{a}, \mathbf{b} (ver [46] página 4).

Nota 1.2.1. Dados $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}$ se verifica

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c})(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{w}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathcal{V}.$$

En adelante, denotamos por $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^d$ una base ortonormal de \mathcal{V} . Además, consideramos que los índices repetidos indican suma sobre todos los posibles valores del índice.

Nota 1.2.2. El conjunto $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k, 1 \leq i, j, k \leq d\}$ forma una base de $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \text{Lin})$. Además, dado $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \text{Lin})$ si

$$\mathbf{S} = S_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k,$$

entonces

$$S_{ijk} = \mathbf{S}(\mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i \quad i, j, k \in \{1, \dots, d\}.$$

Así definidos, los coeficientes S_{ijk} , $i, j, k \in \{1, \dots, d\}$, se llaman las componentes (o coordenadas) de la aplicación $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \text{Lin})$.

Nota 1.2.3. El espacio $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \text{Lin})$ se puede identificar con $\mathcal{BL}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V})$ y también con $\mathcal{L}_3(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ a través de las siguientes aplicaciones

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{L}(\mathcal{V}, \text{Lin}) & \longrightarrow & \mathcal{BL}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V}) & \longrightarrow & \mathcal{L}_3(\mathcal{V}, \mathbb{R}) \\ \mathbf{S} & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{S}} & \longrightarrow & \hat{\mathbf{S}} \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \cdot \mathbf{z} &:= \mathbf{S}(\mathbf{z})(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}, \\ \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) &:= \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{S}(\mathbf{z})(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathcal{V}$. Los elementos de $\mathcal{L}_3(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ generalmente se denominan tensores de tercer orden.

Nota 1.2.4. A partir de las identificaciones dadas en la nota previa y de la norma en el espacio $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \text{Lin})$, podemos introducir las correspondientes normas en los espacios $\mathcal{BL}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V})$ y $\mathcal{L}_3(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ de manera que las identificaciones sean isométricas. Concretamente,

$$|||\tilde{\mathbf{S}}||| := |||\hat{\mathbf{S}}||| := |||\mathbf{S}|||,$$

para $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{BL}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V})$ y $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{L}_3(\mathcal{V}, \mathbb{R})$. A partir de estas definiciones se deduce que

$$\begin{aligned} |||\tilde{\mathbf{S}}||| &= \max_{\mathbf{u}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}} \frac{|\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{u}, \mathbf{w})|}{|\mathbf{u}||\mathbf{w}|} = \max_{\substack{\mathbf{u}, \mathbf{w} \\ |\mathbf{u}|=|\mathbf{w}|=1}} |\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{u}, \mathbf{w})|, \\ |||\hat{\mathbf{S}}||| &= \max_{\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}} \frac{|\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z})|}{|\mathbf{u}||\mathbf{w}||\mathbf{z}|} = \max_{\substack{\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \\ |\mathbf{u}|=|\mathbf{w}|=|\mathbf{z}|=1}} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z}), \end{aligned}$$

para $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{BL}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V})$ y $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{L}_3(\mathcal{V}, \mathbb{R})$. Análogamente, para las aplicaciones $\tilde{\mathbf{S}} : \mathcal{A} \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{BL}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V})$ y $\hat{\mathbf{S}} : \mathcal{A} \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}_3(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ definidas casi por doquier y acotadas, consideramos las siguientes normas

$$|||\tilde{\mathbf{S}}|||_{0,\infty,\mathcal{A}} := |||\hat{\mathbf{S}}|||_{0,\infty,\mathcal{A}} := |||\mathbf{S}|||_{0,\infty,\mathcal{A}}.$$

Definición 1.2.2. Las componentes de $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{BL}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V})$ y de $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{L}_3(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ se definen como

$$\tilde{S}_{ijk} := \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k, \quad \hat{S}_{ijk} := \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) \quad i, j, k \in \{1, \dots, d\}.$$

Trivialmente se verifica

$$S_{ijk} = \tilde{S}_{ijk} = \hat{S}_{ijk} \quad \forall i, j, k \in \{1, \dots, d\}, \quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \text{Lin}).$$

Definición 1.2.3. Se llama “traza” al operador lineal

$$\text{Tr} : \mathcal{L}(\mathcal{V}, \text{Lin}) \longrightarrow \mathcal{V}$$

que satisface

$$\text{Tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) = \text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}.$$

Nota 1.2.5. A partir de la definición anterior es inmediato comprobar que

$$\text{Tr} \mathbf{S} = S_{iik} \mathbf{e}_k \quad k \in \{1, \dots, d\},$$

y también que

$$\text{tr}(\mathbf{S}(\mathbf{c})) = \text{Tr}(\mathbf{S}) \cdot \mathbf{c} \quad \forall \mathbf{c} \in \mathcal{V}, \quad (1.44)$$

para $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \text{Lin})$.

Definición 1.2.4. A partir de las identificaciones dadas en la Nota 1.2.3 podemos definir el operador “traza” en los siguientes espacios

$$\text{Tr} : \mathcal{BL}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{V}, \quad \text{Tr} : \mathcal{L}_3(\mathcal{V}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{V},$$

concretamente,

$$\text{Tr}(\tilde{\mathbf{S}}) := \text{Tr}(\hat{\mathbf{S}}) := \text{Tr}(\mathbf{S}), \quad (1.45)$$

para $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{BL}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V})$ y $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{L}_3(\mathcal{V}, \mathbb{R})$.

Trivialmente, a partir de las definiciones se deduce

$$\text{Tr}(\tilde{\mathbf{S}}) = \tilde{S}_{iik} \mathbf{e}_k, \quad \text{Tr}(\hat{\mathbf{S}}) = \hat{S}_{iik} \mathbf{e}_k \quad k \in \{1, \dots, d\},$$

para $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{L}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V})$ y $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{L}_3(\mathcal{V}, \mathbb{R})$.

Nota 1.2.6. A lo largo de este apartado, dada $G : \mathcal{F} \subset \mathcal{E} \longrightarrow \text{Lin}$ una aplicación diferenciable, denotamos por $\nabla G(c)$ la diferencial de G en el punto c considerada en el espacio $\mathcal{BL}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V})$ y lo llamamos gradiente de G en c , es decir

$$\nabla G(c) := \widetilde{DG(c)} \quad \forall c \in \mathcal{F},$$

siendo $DG(c) \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \text{Lin})$ la diferencial de G en c .

Nota 1.2.7. Se comprueba facilmente que se verifica

$$\nabla G(c)(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \cdot \mathbf{z} = \nabla(G(c)(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{z} = (\nabla(G(c)(\mathbf{w}))\mathbf{z}) \cdot \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathcal{V}, \quad \forall c \in \mathcal{F},$$

para toda aplicación $G : \mathcal{F} \subset \mathcal{E} \longrightarrow \text{Lin}$ diferenciable.

Nota 1.2.8. Sea $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{BL}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V})$ y $M \in \text{Lin}$, entonces la composición $M \circ \mathbf{S} \in \mathcal{BL}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V})$. Denotaremos dicha composición por $M\mathbf{S}$.

Proposición 1.2.1. Sean $Y : \mathcal{A} \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, $G : Y(\mathcal{A}) \longrightarrow \text{Lin}$ dos aplicaciones diferenciables, entonces $G \circ Y$ es diferenciable, además se verifica

$$\nabla(G \circ Y)(q) = (\nabla Y)^T(q) \nabla G(Y(q)) \quad \forall q \in \mathcal{A}.$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la regla de la cadena y la identificación entre $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \text{Lin})$ y $\mathcal{BL}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V})$ dada en la Nota 1.2.3 se deduce

$$\begin{aligned} \nabla(G \circ Y)(q)(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \cdot \mathbf{z} &= D(G \circ Y)(q)(\mathbf{z})(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} \\ &= DG(Y(q))(\nabla Y(q)(\mathbf{z}))(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} \\ &= \nabla G(Y(q))(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \cdot \nabla Y(q)(\mathbf{z}) \\ &= (\nabla Y)^T(q) \nabla G(Y(q))(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \cdot \mathbf{z}, \end{aligned}$$

obteniendo el resultado. \square

Definición 1.2.5. Dados dos tensores $M, R \in \text{Lin}$ definimos $(M, R) \in \mathcal{L}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V} \times \mathcal{V})$ como

$$(M, R)(\mathbf{u}, \mathbf{w}) := (M(\mathbf{u}), R(\mathbf{w})) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}.$$

Nota 1.2.9. Sea $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{BL}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V})$ y $M, R \in \text{Lin}$, entonces la composición $\mathbf{S} \circ (M, R) \in \mathcal{BL}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V})$. Denotaremos dicha composición por $\mathbf{S}(M, R)$.

Proposición 1.2.2. Sea $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{BL}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V})$ y $R \in \text{Lin}$, entonces se verifica

$$\text{Tr} \left(\tilde{\mathbf{S}}(I, R) \right) = \text{Tr} \left(\tilde{\mathbf{S}}(R^T, I) \right). \quad (1.46)$$

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que por definición se verifica

$$\text{Tr}(\tilde{\mathbf{S}}) = \tilde{S}_{ik} \mathbf{e}_k \quad \forall k \in \{1, \dots, d\}, \forall \tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{BL}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V}).$$

Además, teniendo en cuenta la Definición 1.2.5 se tiene

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathbf{S}}(R^T, I) \right)_{ik} &= \tilde{\mathbf{S}}(R^T, I)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_k = \tilde{\mathbf{S}}(R_{il} \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_k \\ &= R_{il} \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_k = R_{il} \tilde{S}_{lik}, \\ \left(\tilde{\mathbf{S}}(I, R) \right)_{ik} &= \tilde{\mathbf{S}}(I, R)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_k = \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{e}_i, R_{li} \mathbf{e}_l) \cdot \mathbf{e}_k \\ &= R_{li} \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l) \cdot \mathbf{e}_k = R_{li} \tilde{S}_{ilk}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

de lo que se deduce el resultado. \square

Proposición 1.2.3. Sean $G, H : \mathcal{A} \subset \mathcal{E} \longrightarrow \text{Lin}$ dos aplicaciones diferenciables. Entonces, se verifica

$$\nabla(GH)(q) = \nabla H(q)(G^T(q), I) + \nabla G(q)(I, H(q)) \quad \forall q \in \mathcal{A}. \quad (1.48)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $h(q) := G(q)H(q) \in \text{Lin}$. Entonces, aplicando la regla del producto generalizada (ver [46] página 25), se tiene

$$Dh(q)(\mathbf{z}) = G(q)DH(q)(\mathbf{z}) + DG(q)(\mathbf{z})H(q) \quad \forall q \in \mathcal{A}, \forall \mathbf{z} \in \mathcal{V}.$$

Entonces se verifica

$$\begin{aligned}
 \nabla h(q)(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \cdot \mathbf{z} &= Dh(q)(\mathbf{z})(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (G(q)DH(q)(\mathbf{z}))(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} \\
 &+ (DG(q)(\mathbf{z})H(q))(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = DH(q)(\mathbf{z})(\mathbf{w}) \cdot G^T(q)(\mathbf{u}) \\
 &+ DG(q)(\mathbf{z})(H(q)(\mathbf{w})) \cdot \mathbf{u} = \nabla H(q)(G^T(q)(\mathbf{u}), \mathbf{w}) \cdot \mathbf{z} \\
 &+ \nabla G(q)(\mathbf{u}, H(q)(\mathbf{w})) \cdot \mathbf{z} \quad \forall q \in \mathcal{A}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathcal{V},
 \end{aligned} \tag{1.49}$$

de lo que se deduce en resultado. \square

Proposición 1.2.4. Sean $G, H : \mathcal{A} \subset \mathcal{E} \longrightarrow \text{Lin}$ dos aplicaciones diferenciables. Entonces, la aplicación

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(GH) : \mathcal{A} \subset \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 q &\longrightarrow \text{tr}(G(q)H(q)),
 \end{aligned}$$

es diferenciable, además

$$\nabla(\text{tr}(GH))(q) = \text{Tr}(\nabla H(q)(G^T(q), I)) + \text{Tr}(\nabla G(q)(I, H(q))) \quad \forall q \in \mathcal{A}.$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar se observa que la aplicación $\text{tr}(GH)$ es diferenciable puesto que es composición de aplicaciones diferenciables. Además aplicando la regla de la cadena y la proposición anterior se tiene que para cada $\mathbf{z} \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned}
 D(\text{tr}(GH))(q)(\mathbf{z}) &= \text{tr}(D(GH)(q)(\mathbf{z})) = \text{Tr}(D(GH)(q)) \cdot \mathbf{z} \\
 &= \text{Tr}(\nabla(GH)(q)) \cdot \mathbf{z} = \text{Tr}(\nabla H(q)(G^T(q), I) + \nabla G(q)(I, H(q))) \cdot \mathbf{z} \\
 &= (\text{Tr}(\nabla H(q)(G^T(q), I)) + \text{Tr}(\nabla G(q)(I, H(q)))) \cdot \mathbf{z},
 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado (1.44) y (1.45). A partir de esta expresión se deduce el resultado. \square

Corolario 1.2.1. Sea $G : \mathcal{A} \subset \mathcal{E} \longrightarrow \text{Lin}$ una aplicación diferenciable. Entonces, la aplicación

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(G^2) : \mathcal{A} \subset \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 q &\longrightarrow \text{tr}((G(q))^2),
 \end{aligned}$$

es diferenciable, además

$$\nabla(\text{tr}(G^2))(q) = 2\text{Tr}(\nabla G(q)(G^T(q), I)) \quad \forall q \in \mathcal{A}.$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicado la Proposición anterior con $GH = G^2$ y la Proposición 1.2.2 con

$$\tilde{S} = \nabla G(q), \quad R = G(q).$$

se deduce el resultado. \square

Nota 1.2.10. En adelante, distinguiremos entre los gradientes de campos tensoriales espaciales y materiales, análogamente a como hacemos para campos escalares o vectoriales. Concretamente, dado G un campo tensorial espacial (respectivamente, material) diferenciable, denotamos por $\text{grad} G(x, t)$ (respectivamente,

por $\nabla G(p, t)$ el gradiente con respecto al primer argumento de G en el punto (x, t) (respectivamente, (p, t)), es decir, si G es un campo espacial

$$\text{grad } G(x, t) = \widetilde{DG}(x, t),$$

análogamente, si G es un campo material

$$\nabla G(p, t) = \widetilde{DG}(p, t),$$

siendo DG la diferencial de G con respecto al primer argumento.

Grado topológico de Brouwer

Será útil introducir la definición de grado topológico de Brouwer y algunas propiedades que verifica.

Definición 1.2.6. Sea $b : \overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, $b \in \mathbf{C}^1(\mathcal{A}) \cap \mathbf{C}(\overline{\mathcal{A}})$, y $z \in \mathcal{E}$ tal que $z \notin b(\partial\mathcal{A})$. Consideramos $0 < \varepsilon < \text{dist}(z, b(\partial\mathcal{A}))$ y $\varphi :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in C([0, \infty[)$ con soporte compacto contenido en $]0, \varepsilon[$, y tal que

$$\int_{\mathcal{E}} \varphi(|z|) dz = 1.$$

Entonces, se denomina grado topológico de Brouwer de b en \mathcal{A} con respecto al punto z al siguiente número

$$\text{grado}(b, \mathcal{A}, z) := \int_{\mathcal{A}} \varphi(|b(r) - z|) J_b(r) dr,$$

siendo $J_b(r)$ el determinante de la matriz jacobiana de b en el punto r .

Puede comprobarse que el número $\text{grado}(b, \mathcal{A}, z)$ es independiente de la elección del parámetro ε y de la aplicación φ (consultar [48]).

Observación 1.2.4. Nótese que si $z \notin b(\overline{\mathcal{A}})$, entonces

$$\text{grado}(b, \mathcal{A}, z) = 0.$$

En efecto, tomando $0 < \varepsilon < \text{dist}(z, b(\overline{\mathcal{A}})) \leq \text{dist}(z, b(\partial\mathcal{A}))$ se deduce inmediatamente el resultado.

A continuación vamos a definir el grado topológico para funciones que son solamente continuas, para ello primero conviene enunciar el siguiente resultado (ver [48] Teorema y Definición 1.7).

Teorema 1.2.1. Sean $b : \overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, $b \in \mathbf{C}(\overline{\mathcal{A}})$, y $b_n : \overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, una sucesión de aplicaciones $b_n \in \mathbf{C}^1(\mathcal{A}) \cap \mathbf{C}(\overline{\mathcal{A}})$, tal que

$$\|b_n - b\|_{0, \infty, \mathcal{A}} \longrightarrow 0.$$

Consideramos $z \in \mathcal{E}$ tal que $z \notin b(\partial\mathcal{A})$. Entonces, el grado topológico de b_n con respecto al punto z existe para n suficientemente grande y también el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{grado}(b_n, \mathcal{A}, z).$$

Entonces, tiene sentido introducir la siguiente definición

Definición 1.2.7. Sea $b : \overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, $b \in \mathbf{C}(\overline{\mathcal{A}})$, y $z \in \mathcal{E}$ tal que $z \notin b(\partial\mathcal{A})$. Consideramos $b_n : \overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ una sucesión de aplicaciones, $b_n \in \mathbf{C}^1(\mathcal{A}) \cap \mathbf{C}(\overline{\mathcal{A}})$, tal que

$$\|b_n - b\|_{0, \infty, \mathcal{A}} \longrightarrow 0.$$

Entonces, el grado topológico de b se define como

$$\text{grado}(b, \mathcal{A}, z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \text{grado}(b_n, \mathcal{A}, z).$$

Esta definición es independiente de la sucesión $\{b_n\}$ elegida.

Definición 1.2.8. Dadas $b, \tilde{b} : \bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ dos aplicaciones continuas. Se dice que b y \tilde{b} son homótopas si existe una aplicación continua

$$H : \bar{\mathcal{A}} \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{E},$$

tal que $H(\cdot, 0) = b$ y $H(\cdot, 1) = \tilde{b}$.

El grado topológico es invariante por homotopías (ver [48] Proposición 2.8) y es un número entero (ver [48] Lemma 2.10), concretamente

Proposición 1.2.5. Sea $H : \bar{\mathcal{A}} \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{E}$ una aplicación continua y $z \notin H(\partial\mathcal{A} \times [0, 1])$. Entonces, para todo $s \in [0, 1]$ se verifica

$$\text{grado}(H(\cdot, s), \mathcal{A}, z) = \text{grado}(H(\cdot, 0), \mathcal{A}, z).$$

Lema 1.2.5. Sea $b : \bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, $b \in \mathbf{C}^1(\mathcal{A}) \cap \mathbf{C}(\bar{\mathcal{A}})$. Denotamos por $S := \{q \in \mathcal{A}, J_b(q) = 0\}$ el conjunto de puntos singulares de b y supongamos que $z \notin b(\partial\mathcal{A}) \cup b(S)$. Entonces se tiene

$$\text{grado}(b, \mathcal{A}, z) = \begin{cases} \sum_{q \in b^{-1}(z)} \text{sgn}(J_b(q)) \in \mathbb{Z} & \text{si } z \in b(\bar{\mathcal{A}}), \\ 0 & \text{si } z \notin b(\bar{\mathcal{A}}), \end{cases}$$

siendo $\text{sgn}(J_b(q))$ el signo del determinante de la matriz jacobiana de b en el punto q .

1.3. Dos formulaciones del problema

El objetivo de esta sección es obtener formulaciones débiles del problema (1.8). En concreto, proponemos dos: una generalización de la formulación presentada en [68] que se utiliza para introducir los métodos semi-Lagrangianos clásicos (ver por ejemplo [63]) y otra de la que obtenemos nuevos métodos Lagrangianos y semi-Lagrangianos. A pesar de que en [68] se introduce una formulación que generaliza la clásica, el marco continúa siendo semi-Lagrangiano; además se considera que el campo de velocidades se anula sobre la frontera. Nuestra extensión de dicha formulación contempla la posibilidad de obtener también métodos Lagrangianos y considerar cualquier campo de velocidades. La segunda formulación es menos estándar, por ejemplo, en [29] se utiliza para un problema de Cauchy de convección-difusión con condiciones de contorno Dirichlet y Neumann. En este trabajo extendemos dicha formulación en varios aspectos: consideramos un término difusivo con matriz variable en espacio en lugar del clásico laplaciano y una condición de contorno mixta Dirichlet-Robin. A pesar de la existencia de numerosa bibliografía referente a los métodos de características, es escasa la que presenta una formulación general en la que tengan cabida tanto los métodos semi-Lagrangianos como los puramente Lagrangianos. En este trabajo se realiza una aportación en este sentido puesto que introducimos dos formulaciones que generalizan la clásica y con las que es posible obtener a la vez métodos Lagrangianos y semi-Lagrangianos.

1.3.1. Formulación I

En primer lugar, aplicando un cambio de variable, vamos a obtener una nueva formulación fuerte del problema (1.8). Para ello utilizamos los Lemas 1.2.1 y 1.2.3. Concretamente, evaluando la primera ecuación de (1.8) en el punto $x = (X_e)_\tau(y, t)$, con $y \in \Omega_\tau$, y aplicando el Lema 1.2.1 con $\psi = \phi$, obtenemos

$$\begin{aligned} \rho((X_e)_\tau(y, t)) \frac{d}{dt} \phi((X_e)_\tau(y, t), t) - \text{div}_x (A((X_e)_\tau(y, t)) \text{grad}_x \phi((X_e)_\tau(y, t), t)) \\ = f((X_e)_\tau(y, t), t), \end{aligned} \quad (1.50)$$

para $(y, t) \in \Omega_\tau \times (0, T)$. Nótese que en (1.50) aparecen operadores diferenciales con respecto a la variable x . Para obtener una formulación fuerte del problema (1.8) en coordenadas (y, t) aplicamos el Lema 1.2.3 al término de difusión de la ecuación (1.50), con

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \Omega_\tau, \quad Y = (X_e)_\tau(\cdot, t), \\ B &= A, \quad \varphi = \phi(\cdot, t).\end{aligned}$$

Por último, a partir de las condiciones de contorno y la condición inicial del problema (1.8) se deducen dichas condiciones para la aplicación ϕ_τ , obteniendo el siguiente problema mixto de valores iniciales y de contorno

Problema Fuerte I: Encontrar una función $\phi_\tau : \bar{\Omega}_\tau \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}& \rho_\tau(y, t) \frac{\partial}{\partial t} \phi_\tau(y, t) \\& - \operatorname{div}_y \left[F_\tau^{-1}(y, t) A_\tau(y, t) F_\tau^{-T}(y, t) \operatorname{grad}_y \phi_\tau(y, t) \det F_\tau(y, t) \right] \frac{1}{\det F_\tau(y, t)} \\& = f_\tau(y, t), \\& \text{para } (y, t) \in \Omega_\tau \times (0, T), \\& \phi_\tau(y, t) = (\phi_D)_\tau(y, t) \text{ en } \Gamma_\tau^D \times (0, T), \\& |F_\tau^{-T}(y, t) \mathbf{m}(y)| \alpha \phi_\tau(y, t) \\& + A_\tau(y, t) F_\tau^{-T}(y, t) \operatorname{grad}_y \phi_\tau(y, t) \cdot F_\tau^{-T}(y, t) \mathbf{m}(y) \\& = |F_\tau^{-T}(y, t) \mathbf{m}(y)| g_\tau(y, t) \text{ en } \Gamma_\tau^R \times (0, T), \\& \phi_\tau(y, 0) = \phi^0(P(y, \tau)) \text{ en } \bar{\Omega}_\tau.\end{aligned} \tag{1.51}$$

En las ecuaciones F_τ es el Jacobiano de la transformación $(X_e)_\tau$ y \mathbf{m} el vector unitario normal a $\partial\Omega_\tau$ dirigido hacia el exterior de Ω_τ .

Para obtener una formulación débil de este problema, en primer lugar, multiplicamos la primera ecuación de (1.51) por una función test $v \in H_{\Gamma^D}^1(\Omega_\tau)$ e integramos en Ω_τ , obteniendo

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega_\tau} \rho_\tau(y, t) \frac{\partial}{\partial t} \phi_\tau(y, t) v(y) dy \\& - \int_{\Omega_\tau} \operatorname{div}_y \left[F_\tau^{-1}(y, t) A_\tau(y, t) F_\tau^{-T}(y, t) \operatorname{grad}_y \phi_\tau(y, t) \det F_\tau(y, t) \right] \frac{1}{\det F_\tau(y, t)} v(y) dy \\& = \int_{\Omega_\tau} f_\tau(y, t) v(y) dy.\end{aligned} \tag{1.52}$$

Dado $t \in (0, T)$, aplicando el Lema 1.2.4 al término de difusión de (1.52), con

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \Omega_\tau, \quad G = F_\tau(\cdot, t), \\ \mathbf{w} &= A_\tau(\cdot, t)F_\tau^{-T}(\cdot, t) \operatorname{grad} \phi_\tau(\cdot, t), \quad \varphi = v,\end{aligned}$$

se deduce

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega_\tau} \rho_\tau(y, t) \frac{\partial}{\partial t} \phi_\tau(y, t) v(y) dy \\& + \int_{\Omega_\tau} F_\tau^{-1}(y, t) A_\tau(y, t) F_\tau^{-T}(y, t) \operatorname{grad}_y \phi_\tau(y, t) \cdot \operatorname{grad}_y v(y) dy \\& - \int_{\Gamma_\tau^R} F_\tau^{-T}(y, t) \mathbf{m}(y) \cdot A_\tau(y, t) F_\tau^{-T}(y, t) \operatorname{grad}_y \phi_\tau(y, t) v(y) dA_y \\& + \int_{\Omega_\tau} \operatorname{div}_y F_\tau^{-T}(y, t) \cdot A_\tau(y, t) F_\tau^{-T}(y, t) \operatorname{grad}_y \phi_\tau(y, t) v(y) dy \\& = \int_{\Omega_\tau} f_\tau(y, t) v(y) dy.\end{aligned}\tag{1.53}$$

Por último, reemplazando la condición Robin de (1.51) en la integral frontera, resulta la siguiente formulación débil

Formulación Variacional I

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega_\tau} \rho_\tau(y, t) \frac{\partial}{\partial t} \phi_\tau(y, t) v(y) dy \\& + \int_{\Omega_\tau} F_\tau^{-1}(y, t) A_\tau(y, t) F_\tau^{-T}(y, t) \operatorname{grad}_y \phi_\tau(y, t) \cdot \operatorname{grad}_y v(y) dy \\& + \int_{\Gamma_\tau^R} |F_\tau^{-T}(y, t) \mathbf{m}(y)| \alpha \phi_\tau(y, t) v(y) dA_y \\& + \int_{\Omega_\tau} \operatorname{div}_y F_\tau^{-T}(y, t) \cdot A_\tau(y, t) F_\tau^{-T}(y, t) \operatorname{grad}_y \phi_\tau(y, t) v(y) dy \\& = \int_{\Omega_\tau} f_\tau(y, t) v(y) dy + \int_{\Gamma_\tau^R} |F_\tau^{-T}(y, t) \mathbf{m}(y)| g_\tau(y, t) v(y) dA_y,\end{aligned}\tag{1.54}$$

para cada $t \in (0, T)$.

1.3.2. Formulación II

En general, la formulación débil (1.54) no proporciona esquemas simétricos, debido al término

$$\int_{\Omega_\tau} \operatorname{div}_y F_\tau^{-T}(y, t) \cdot A_\tau(y, t) F_\tau^{-T}(y, t) \operatorname{grad}_y \phi_\tau(y, t) v(y) dy.$$

Por lo tanto, el objetivo de este apartado es obtener otra formulación débil del problema (1.51) que sea simétrica. Para ello, partimos de una nueva formulación fuerte equivalente a (1.51). Concretamente, multiplicamos la primera ecuación de (1.51) por $\det F_\tau$, obteniendo

Problema Fuerte II: Encontrar una función $\phi_\tau : \overline{\Omega}_\tau \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}
 & \rho_\tau(y, t) \frac{\partial}{\partial t} \phi_\tau(y, t) \det F_\tau(y, t) \\
 & - \operatorname{div}_y [F_\tau^{-1}(y, t) A_\tau(y, t) F_\tau^{-T}(y, t) \operatorname{grad}_y \phi_\tau(y, t) \det F_\tau(y, t)] \\
 & = f_\tau(y, t) \det F_\tau(y, t), \\
 & \text{para } (y, t) \in \Omega_\tau \times (0, T), \\
 & \phi_\tau(y, t) = (\phi_D)_\tau(y, t) \text{ en } \Gamma_\tau^D \times (0, T), \\
 & |F_\tau^{-T}(y, t) \mathbf{m}(y)| \alpha \phi_\tau(y, t) \det F_\tau(y, t) \\
 & + F_\tau^{-1}(y, t) A_\tau(y, t) F_\tau^{-T}(y, t) \operatorname{grad}_y \phi_\tau(y, t) \cdot \mathbf{m}(y) \det F_\tau(y, t) \\
 & = |F_\tau^{-T}(y, t) \mathbf{m}(y)| g_\tau(y, t) \det F_\tau(y, t) \text{ en } \Gamma_\tau^R \times (0, T), \\
 & \phi_\tau(y, 0) = \phi^0(P(y, \tau)) \text{ en } \overline{\Omega}_\tau.
 \end{aligned} \tag{1.55}$$

Para obtener una formulación débil del problema (1.55), multiplicamos la primera ecuación por una función test $\psi \in H_{\Gamma_\tau^D}^1(\Omega_\tau)$, integramos en Ω_τ , aplicamos la fórmula usual de Green al término de difusión y reemplazamos la condición Robin de (1.55) en la integral frontera, deduciendo

Formulación Variacional II

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\tau} \rho_\tau(y, t) \frac{\partial}{\partial t} \phi_\tau(y, t) \psi(y) \det F_\tau(y, t) dy \\
 & + \int_{\Omega_\tau} F_\tau^{-1}(y, t) A_\tau(y, t) F_\tau^{-T}(y, t) \operatorname{grad}_y \phi_\tau(y, t) \cdot \operatorname{grad}_y \psi(y) \det F_\tau(y, t) dy \\
 & + \int_{\Gamma_\tau^R} |F_\tau^{-T}(y, t) \mathbf{m}(y)| \alpha \phi_\tau(y, t) \psi(y) \det F_\tau(y, t) dA_y \\
 & = \int_{\Omega_\tau} f_\tau(y, t) \psi(y) \det F_\tau(y, t) dy + \int_{\Gamma_\tau^R} |F_\tau^{-T}(y, t) \mathbf{m}(y)| g_\tau(y, t) \psi(y) \det F_\tau(y, t) dA_y, \\
 & \text{para } t \in (0, T).
 \end{aligned} \tag{1.56}$$

A partir de esta formulación se obtienen esquemas simétricos, esta ventaja no la presenta la formulación (1.54).

Para realizar estos cálculos formales asumimos regularidad suficiente de las funciones involucradas.

Observación 1.3.1. *Las dos formulaciones variacionales obtenidas son equivalentes. En particular, veamos cómo se puede obtener (1.56) a partir de (1.54). Aplicando (1.40) y (1.41) con $G(y) = F_\tau(y, t)$ y $\zeta = \psi$, se deduce*

$$\begin{aligned} F_\tau^{-T}(y, t) \operatorname{grad}_y [\psi(y) \det F_\tau(y, t)] &= \operatorname{div}_y (\psi(y) \det F_\tau(y, t) F_\tau^{-T}(y, t)) \\ &\quad - \psi(y) \det F_\tau(y, t) \operatorname{div}_y F_\tau^{-T}(y, t) \\ &= \det F_\tau(y, t) F_\tau^{-T} \operatorname{grad}_y \psi(y) \\ &\quad - \psi(y) \det F_\tau(y, t) \operatorname{div}_y F_\tau^{-T}(y, t). \end{aligned} \quad (1.57)$$

Eligiendo en la ecuación (1.54) la función test $v = \psi \det F_\tau(\cdot, t) \in H^1(\Omega_\tau)$ e introduciendo la expresión (1.57) se consigue (1.56). De forma análoga puede comprobarse que a partir de la ecuación (1.56) se obtiene (1.54).

1.4. Discretización temporal

El objetivo de esta sección es obtener métodos de características Lagrangianos y semi-Lagrangianos. Dichos métodos se deducen introduciendo diferentes semidiscretizaciones temporales en los problemas (1.51) y (1.55). Concretamente las semidiscretizaciones temporales que consideramos se basan en (ver, por ejemplo, [49]): el método de Adams-Moulton de un paso (método del Trapecio) y el segundo método de la familia BDF (Backward Differentiation Formulas), de dos pasos. El método de dos pasos es semi-Lagrangiano, mientras que con el método de un paso proponemos formulaciones Lagrangianas y semi-Lagrangianas. Además introducimos una semidiscretización temporal en la formulación débil (1.56). Un caso particular de ésta se utiliza para obtener el método de características enteramente Lagrangiano que estudiamos en este trabajo.

En primer lugar, introducimos el paso de tiempo de la discretización $\Delta t = \frac{T}{N}$ obteniendo así una partición uniforme del intervalo $[0, T]$:

$$t_n = n\Delta t, \quad n \in \{0, 1/2, 1, \dots, N\}. \quad (1.58)$$

Para aproximar la derivada

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_\tau(y, t),$$

se pueden considerar diferentes fórmulas:

- Fórmula de primer orden:

$$\frac{\phi_\tau(y, t) - \phi_\tau(y, t - \Delta t)}{\Delta t}. \quad (1.59)$$

- Fórmula centrada de segundo orden:

$$\frac{\phi_\tau(y, t + \frac{\Delta t}{2}) - \phi_\tau(y, t - \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t}. \quad (1.60)$$

- Fórmula de dos pasos de segundo orden:

$$\frac{1}{2\Delta t} (3\phi_\tau(y, t) - 4\phi_\tau(y, t - \Delta t) + \phi_\tau(y, t - 2\Delta t)). \quad (1.61)$$

En adelante escribiremos $\psi^n(x) := \psi(x, t_n)$.

Según la elección del parámetro τ , del instante de tiempo t , de la fórmula numérica empleada para aproximar la derivada material y de la formulación elegida (1.51) ó (1.55), se obtendrán diferentes métodos semi-Lagrangianos o Lagrangianos. Detallaremos a continuación los métodos que aparecen en la bibliografía y nuevos métodos que utilizaremos en este trabajo. Empleamos la siguiente notación

$$\psi_j^l(x) = \psi_{t_j}(x, t_l) \quad 0 \leq j, l \leq N. \quad (1.62)$$

- Método semi-Lagrangiano de un paso I: evaluando la primera ecuación de (1.51) en $t = t_{n+\frac{1}{2}}$, tomando $\tau = t_{n+1}$, aproximando la derivada material por la fórmula centrada (1.60) y los demás términos por una combinación lineal convexa en la que intervienen los tiempos t_n y t_{n+1} , obtenemos el método semi-Lagrangiano que se introduce en [68]:

$$\begin{aligned} & (\theta \rho(y) + (1 - \theta) \rho_{n+1}^n(y)) \frac{\phi^{n+1}(y) - \phi_{n+1}^n(y)}{\Delta t} - \theta \operatorname{div}_y [A(y) \operatorname{grad}_y \phi^{n+1}(y)] \\ & - (1 - \theta) \operatorname{div}_y [(F_{n+1}^n)^{-1}(y) A_{n+1}^n(y) (F_{n+1}^n)^{-T}(y) \operatorname{grad}_y \phi_{n+1}^n(y) \det F_{n+1}^n(y)] \frac{1}{\det F_{n+1}^n(y)} \quad (1.63) \\ & = \theta f^{n+1}(y) + (1 - \theta) f_{n+1}^n(y) \quad y \in \Omega_{t_{n+1}}, \end{aligned}$$

siendo $0 \leq n \leq N - 1$ y donde hemos utilizado que $\psi_{n+1}^{n+1} = \psi^{n+1}$, para $\psi = \rho, \phi, A$ y f , y $F_{n+1}^{n+1} = I$.

Casos particulares:

1. Para $\theta = 1$ resulta el método (clásico) semi-Lagrangiano de primer orden. Este método también puede obtenerse partiendo de la formulación (1.55).
 2. Para $\theta = 1/2$ obtenemos el método semi-Lagrangiano de segundo orden que se estudia en [68].
- Método Semi-Lagrangiano de un paso II: evaluando la primera ecuación de (1.55) en $t = t_{n+\frac{1}{2}}$, tomando $\tau = t_n$, aproximando la derivada material por la fórmula centrada (1.60) y los demás términos por una combinación lineal convexa en la que intervienen los tiempos t_n y t_{n+1} , obtenemos

$$\begin{aligned} & (\theta \rho_n^{n+1}(y) \det F_n^{n+1}(y) + (1 - \theta) \rho(y)) \frac{\phi_n^{n+1}(y) - \phi^n(y)}{\Delta t} \\ & - \theta \operatorname{div}_y [(\theta (F_n^{n+1})^{-1}(y) A_n^{n+1}(y) (F_n^{n+1})^{-T}(y) \det F_n^{n+1}(y) + (1 - \theta) A(y)) \operatorname{grad}_y \phi_n^{n+1}(y)] \\ & - (1 - \theta) \operatorname{div}_y [(\theta (F_n^{n+1})^{-1}(y) A_n^{n+1}(y) (F_n^{n+1})^{-T}(y) \det F_n^{n+1}(y) + (1 - \theta) A(y)) \operatorname{grad}_y \phi^n(y)] \\ & = \theta \det F_n^{n+1}(y) f_n^{n+1}(y) + (1 - \theta) f^n(y) \quad y \in \Omega_{t_n}, \quad (1.64) \end{aligned}$$

siendo $0 \leq n \leq N - 1$ y donde hemos utilizado que $\psi_n^n = \psi^n$, para $\psi = \rho, \phi, A$ y f , y $F_n^n = I$.

- Método Lagrangiano de un paso: evaluando la primera ecuación de (1.55) en $t = t_{n+\frac{1}{2}}$, tomando $\tau = t_0 = 0$, aproximando la derivada material por la fórmula centrada (1.60) y los demás términos por una combinación lineal convexa en la que intervienen los tiempos t_n y t_{n+1} , obtenemos

$$\begin{aligned} & (\theta \rho_m^{n+1}(p) \det F^{n+1}(p) + (1 - \theta) \rho_m^n(p) \det F^n(p)) \frac{\phi_m^{n+1}(p) - \phi_m^n(p)}{\Delta t} \\ & - \theta^2 \operatorname{Div} [(F^{n+1})^{-1}(p) A_m^{n+1}(p) (F^{n+1})^{-T}(p) \nabla \phi_m^{n+1}(p) \det F^{n+1}(p)] \\ & - \theta(1 - \theta) \operatorname{Div} [(F^n)^{-1}(p) A_m^n(p) (F^n)^{-T}(p) \nabla \phi_m^{n+1}(p) \det F^n(p)] \quad (1.65) \\ & - \theta(1 - \theta) \operatorname{Div} [(F^{n+1})^{-1}(p) A_m^{n+1}(p) (F^{n+1})^{-T}(p) \nabla \phi_m^n(p) \det F^{n+1}(p)] \\ & - (1 - \theta)^2 \operatorname{Div} [(F^n)^{-1}(p) A_m^n(p) (F^n)^{-T}(p) \nabla \phi_m^n(p) \det F^n(p)] \\ & = \theta \det F^{n+1}(p) f_m^{n+1}(p) + (1 - \theta) \det F^n(p) f_m^n(p) \quad p \in \Omega, \end{aligned}$$

siendo $0 \leq n \leq N-1$ y donde hemos utilizado que $\psi_0^l = \psi_m^l$ para $\psi = \rho, \phi, A$ y f , y $F_0^l = F^l$.

- Método semi-Lagrangiano de segundo orden de dos pasos: evaluando la primera ecuación de (1.51) ó de (1.55) en $t = t_{n+1}$, tomando $\tau = t_{n+1}$ y aproximando la derivada material por la fórmula de tres puntos (1.61), obtenemos el método semi-Lagrangiano que se propone en [40],

$$\rho(y) \frac{3\phi^{n+1}(y) - 4\phi_{n+1}^n(y) + \phi_{n+1}^{n-1}(y)}{2\Delta t} - \operatorname{div}_y [A(y) \operatorname{grad}_y \phi^{n+1}(y)] = f^{n+1}(y), \quad y \in \Omega_{t_{n+1}}, \quad (1.66)$$

siendo $1 \leq n \leq N-1$ y donde hemos utilizado que $\psi_{n+1}^{n+1} = \psi^{n+1}$, para $\psi = \rho, \phi, A$ y f , y $F_{n+1}^{n+1} = I$.

En este trabajo, para la semidiscretización temporal de (1.55) proponemos el método Lagrangiano (1.65) y lo analizamos para $\theta = 1/2$. Además, los tres últimos métodos que introducimos arriba se han implementado mediante programas de ordenador. En la Sección 4.4 presentamos los resultados numéricos para los tres métodos y realizamos un análisis comparativo. A continuación vamos a obtener la formulación débil del método Lagrangiano (1.65). Para ello elegimos en (1.56) $\tau = 0$ y $t = t_{n+\frac{1}{2}}$, aproximamos la derivada material por la fórmula centrada (1.60) y para el resto de términos utilizamos una combinación lineal convexa en la que intervienen los tiempos $t = t_n$ y $t = t_{n+1}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\theta \rho_m^{n+1}(p) \det F^{n+1}(p) + (1-\theta) \rho_m^n(p) \det F^n(p)) \frac{\phi_{m,\Delta t}^{n+1}(p) - \phi_{m,\Delta t}^n(p)}{\Delta t} \psi(p) dp \\ & + \theta^2 \int_{\Omega} (F^{n+1})^{-1}(p) A_m^{n+1}(p) (F^{n+1})^{-T}(p) \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1}(p) \cdot \nabla \psi(p) \det F^{n+1}(p) dp \\ & + (1-\theta)\theta \int_{\Omega} (F^n)^{-1}(p) A_m^n(p) (F^n)^{-T}(p) \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1}(p) \cdot \nabla \psi(p) \det F^n(p) dp \\ & + (1-\theta)\theta \int_{\Omega} (F^{n+1})^{-1}(p) A_m^{n+1}(p) (F^{n+1})^{-T}(p) \nabla \phi_{m,\Delta t}^n(p) \cdot \nabla \psi(p) \det F^{n+1}(p) dp \\ & + (1-\theta)^2 \int_{\Omega} (F^n)^{-1}(p) A_m^n(p) (F^n)^{-T}(p) \nabla \phi_{m,\Delta t}^n(p) \cdot \nabla \psi(p) \det F^n(p) dp \\ & + \theta^2 \alpha \int_{\Gamma^R} |(F^{n+1})^{-T}(p) \mathbf{m}(p)| \det F^{n+1}(p) \phi_{m,\Delta t}^{n+1}(p) \psi(p) dA_p \\ & + (1-\theta)\theta \alpha \int_{\Gamma^R} |(F^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p)| \det F^n(p) \phi_{m,\Delta t}^{n+1}(p) \psi(p) dA_p \\ & + (1-\theta)\theta \alpha \int_{\Gamma^R} |(F^{n+1})^{-T}(p) \mathbf{m}(p)| \det F^{n+1}(p) \phi_{m,\Delta t}^n(p) \psi(p) dA_p \\ & + (1-\theta)^2 \alpha \int_{\Gamma^R} |(F^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p)| \det F^n(p) \phi_{m,\Delta t}^n(p) \psi(p) dA_p \\ & = \int_{\Omega} (\theta \det F^{n+1}(p) f_m^{n+1}(p) + (1-\theta) \det F^n(p) f_m^n(p)) \psi(p) dp \\ & + \theta \int_{\Gamma^R} |(F^{n+1})^{-T}(p) \mathbf{m}(p)| g_m^{n+1}(p) \det F^{n+1}(p) \psi(p) dA_p \\ & + (1-\theta) \int_{\Gamma^R} |(F^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p)| g_m^n(p) \det F^n(p) \psi(p) dA_p. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Para todos los valores de la familia, salvo para $\theta = 1/2$, resulta un método de primer orden. Para $\theta = 1$ se obtiene un método implícito de primer orden. Para $\theta = 1/2$ resulta el método de segundo orden que analizamos en los Capítulos 2, 3 y 4.

1.5. Método de Crank-Nicholson Lagrangiano

Para resolver numéricamente el problema (1.8) utilizamos el método Lagrangiano (1.67) y lo analizamos para $\theta = 1/2$.

En esta sección, en primer lugar obtenemos algunas propiedades que verifica el movimiento X_e que utilizaremos en el Capítulo 3 para obtener las estimaciones de error temporales. A continuación proponemos fórmulas numéricas para aproximar las curvas características y deducimos propiedades análogas a las que se tienen para el movimiento. Por último, introducimos en la ecuación (1.67) aproximaciones, que conserven el orden de error del método, del movimiento X_e y de sus gradientes; y obtenemos un resultado de existencia y unicidad de solución para el problema semidiscretizado en tiempo.

1.5.1. Curvas características : resultados preliminares

En la mayoría de las situaciones reales, la expresión analítica del movimiento X_e no se conoce. Generalmente conocemos el campo de velocidades \mathbf{v} asociado. Asumimos que $X_e(p, 0) = p$, $\forall p \in \overline{\Omega}$. Entonces, por definición, el movimiento asociado al campo de velocidades \mathbf{v} es la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{X}_e(p, t) &= \mathbf{v}_m(p, t), \\ X_e(p, 0) &= p, \end{cases} \quad (1.68)$$

que suponemos que existe y es única para cada $p \in \overline{\Omega}$. En este apartado, obtenemos algunas propiedades que verifica el movimiento X_e . En primer lugar, será útil calcular las derivadas temporales de $F := \nabla X_e$. Concretamente, a partir de (1.68) se deducen los siguientes problemas de Cauchy.

- Derivando (1.68) respecto de p , teniendo en cuenta que podemos intercambiar las derivadas espaciales y temporales (nótese que $X_e \in \mathbf{C}^3(\overline{\Omega} \times [0, T])$), obtenemos el siguiente problema de valor inicial para F (ver [46] página 63)

$$\begin{cases} \dot{F}(p, t) &= L_m(p, t)F(p, t), \\ F(p, 0) &= I, \end{cases} \quad (1.69)$$

siendo $L(x, t) := \text{grad } \mathbf{v}(x, t)$.

- Derivando la primera ecuación de (1.68) respecto de t y de p , teniendo en cuenta la regularidad de X_e , obtenemos el siguiente problema de valor inicial de segundo orden para F (ver [46] página 63)

$$\begin{cases} \ddot{F}(p, t) &= (\text{grad}_x \dot{\mathbf{v}})_m(p, t)F(p, t), \\ \dot{F}(p, 0) &= L(p, 0), \\ F(p, 0) &= I. \end{cases} \quad (1.70)$$

- Sea $X_e \in \mathbf{C}^4(\overline{\Omega} \times [0, T])$. Entonces, derivando la primera ecuación de (1.68) respecto de t dos veces y de p una vez, teniendo en cuenta la regularidad de X_e , obtenemos el siguiente problema de valor inicial de tercer orden para F

$$\begin{cases} \ddot{\dot{F}}(p, t) &= (\text{grad}_x \ddot{\mathbf{v}})_m(p, t)F(p, t), \\ \ddot{F}(p, 0) &= \text{grad}_x \ddot{\mathbf{v}}(p, 0), \\ \dot{F}(p, 0) &= L(p, 0), \\ F(p, 0) &= I. \end{cases} \quad (1.71)$$

Conviene recordar algunas propiedades conocidas.

Proposición 1.5.1. Si $X_e \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega} \times [0, T])$, entonces

$$\|F\|_{0,\infty,\overline{\Omega} \times [0,T]} \leq e^{T\|L\|_{0,\infty,T}}. \quad (1.72)$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar aplicando la regla de Barrow en la primera ecuación de (1.69), obtenemos

$$F(p, t) = I + \int_0^t L(X_e(p, s), s)F(p, s)ds \quad \forall (p, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T], \quad (1.73)$$

donde hemos utilizado la condición inicial del problema. Aplicando normas se deduce

$$\|F(p, t)\|_2 \leq 1 + \int_0^t \|L(X_e(p, s), s)\|_2 \|F(p, s)\|_2 ds.$$

Por último, utilizando el Lema de Gronwall continuo (ver, por ejemplo, [67]) y aplicando el máximo para $(p, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]$ se obtiene (1.72). \square

Proposición 1.5.2. Si $X_e \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega} \times [0, T])$, entonces

$$(F^{-1})^\cdot = -F^{-1}L_m. \quad (1.74)$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, se verifica

$$F^{-1}(p, t)F(p, t) = I \quad \forall (p, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T].$$

Derivando con respecto a la variable temporal, se obtiene

$$(F^{-1})^\cdot(p, t)F(p, t) = -F^{-1}(p, t)\dot{F}(p, t).$$

Por último, (1.74) se obtiene teniendo en cuenta la primera ecuación de (1.69). \square

A partir de la segunda ecuación de (1.69) y (1.74) se obtiene el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} (F^{-1})^\cdot(p, t) &= -F^{-1}(p, t)L_m(p, t), \\ F^{-1}(p, 0) &= I. \end{cases} \quad (1.75)$$

Proposición 1.5.3. Si $X_e \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega} \times [0, T])$, entonces

$$\|F^{-1}\|_{0,\infty,\overline{\Omega} \times [0,T]} \leq e^{T\|L\|_{0,\infty,T}}. \quad (1.76)$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es análoga a la de la Proposición 1.5.1. \square

A continuación obtenemos resultados análogos para $\det F$ y $\det F^{-1}$. En primer lugar se verifica (ver [46] página 27)

$$(\det F)^\cdot(p, t) = \det F(p, t) \operatorname{tr} \left(\dot{F}(p, t)F^{-1}(p, t) \right),$$

para todo $(p, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]$. Entonces, teniendo en cuenta (1.69) se obtiene el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} (\det F)^\cdot(p, t) &= \det F(p, t)(\operatorname{div} \mathbf{v})_m(p, t), \\ \det F(p, 0) &= 1. \end{cases} \quad (1.77)$$

Proposición 1.5.4. Si $X_e \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega} \times [0, T])$, entonces

$$\|\det F\|_{0,\infty,\overline{\Omega} \times [0,T]} \leq e^{T\|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\infty,T}}, \quad (1.78)$$

$$\|\det F^{-1}\|_{0,\infty,\overline{\Omega} \times [0,T]} \leq e^{T\|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\infty,T}}. \quad (1.79)$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar se observa que la solución del problema (1.77) es

$$\det F(p, t) = e^{\int_0^t \operatorname{div} \mathbf{v}(X_e(p, s), s) ds} \quad \forall (p, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T], \quad (1.80)$$

de lo que se deduce (1.78). Además,

$$\det F^{-1}(p, t) = \frac{1}{\det F(p, t)} = e^{-\int_0^t \operatorname{div} \mathbf{v}(X_e(p, s), s) ds},$$

por lo que se obtiene (1.79). \square

Corolario 1.5.1. Si $X_e \in \mathbf{C}^3(\overline{\Omega} \times [0, T])$, entonces

$$\|\nabla \det F\|_{0,\infty,\overline{\Omega} \times [0,T]} \leq e^{T\|\mathbf{v}\|_{1,\infty,T}} T \|\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\infty,T}, \quad (1.81)$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando gradientes en (1.80) y teniendo en cuenta (1.73) se deduce el resultado. \square

Nota 1.5.1. Si $X_e \in \mathbf{C}^3(\overline{\Omega} \times [0, T])$ entonces $((F^{-1})^\cdot)^\cdot$ existe y es continua; además, derivando la primera ecuación de (1.75) con respecto a t y teniendo en cuenta (1.69), (1.70) y (1.75) obtenemos

$$((F^{-1})^\cdot)^\cdot = (F^{-1})^\cdot L_m - F^{-1} ((F^{-1})^\cdot F^{-1})^\cdot = F^{-1} (2L_m^2 - (\operatorname{grad} \dot{\mathbf{v}})_m). \quad (1.82)$$

Análogamente, si $X_e \in \mathbf{C}^4(\overline{\Omega} \times [0, T])$ entonces $((F^{-1})^\cdot)^\cdot$ existe y es continua; concretamente derivando (1.82) con respecto a t y teniendo en cuenta (1.69), (1.70), (1.71) y (1.75) obtenemos

$$\begin{aligned} (((F^{-1})^\cdot)^\cdot)^\cdot &= (F^{-1})^\cdot (2L_m^2 - (\operatorname{grad} \dot{\mathbf{v}})_m) + F^{-1} (2[\dot{F}F^{-1}]^2 - \ddot{F}F^{-1})^\cdot \\ &= -F^{-1} (6L_m^3 - 3L_m(\operatorname{grad} \dot{\mathbf{v}})_m - (\operatorname{grad} \dot{\mathbf{v}})_m L_m + (\operatorname{grad} \ddot{\mathbf{v}})_m). \end{aligned} \quad (1.83)$$

Nota 1.5.2. Si $X_e \in \mathbf{C}^3(\overline{\Omega} \times [0, T])$ entonces $\nabla((F^{-1})^\cdot)$ existe y es continua; además, derivando la primera ecuación de (1.75) con respecto a la variable espacial obtenemos

$$\nabla((F^{-1})^\cdot) = -\nabla F^{-1}(I, L_m) - F^T(\operatorname{grad} L)_m(F^{-T}, I), \quad (1.84)$$

donde hemos utilizado la Proposición 1.2.3 con

$$\mathcal{A} = \Omega, \quad G = F^{-1}(\cdot, t), \quad H = L_m(\cdot, t),$$

y la Proposición 1.2.1 con

$$\mathcal{A} = \Omega, \quad Y = X_e(\cdot, t), \quad G = L(\cdot, t).$$

para cada $t \in [0, T]$.

Análogamente, si $X_e \in \mathbf{C}^4(\overline{\Omega} \times [0, T])$ entonces $\nabla(((F^{-1})^\cdot)^\cdot)$ existe y es continua; concretamente derivando (1.82) con respecto a la variable espacial obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla(((F^{-1})^\cdot)^\cdot) &= \nabla F^{-1}(I, (2L_m^2 - (\operatorname{grad} \dot{\mathbf{v}})_m)) + F^T \{2(\operatorname{grad} L)_m(I, L_m) \\ &\quad + 2(\operatorname{grad} L)_m(L_m^T, I) - (\operatorname{grad}(\operatorname{grad} \dot{\mathbf{v}}))_m\}(F^{-T}, I). \end{aligned}$$

Proposición 1.5.5. Si $X_e \in \mathbf{C}^4(\overline{\Omega} \times [0, T])$, entonces F verifica

$$\begin{aligned}
F^{n+1}(p) &= F^n(p) + \Delta t L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \left(I + \frac{\Delta t}{2} L_m^n(p) \right) F^n(p) \\
&+ \frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} (\text{grad}_x \ddot{\mathbf{v}})_m(p, s) F(p, s) (t_{n+1} - s)^2 ds \\
&+ \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} (\text{grad}_x \ddot{\mathbf{v}})_m(p, s) F(p, s) (t_n - s)^2 ds \\
&+ \Delta t L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} (\text{grad}_x \dot{\mathbf{v}})_m(p, s) F(p, s) (t_{n+\frac{1}{2}} - s) ds,
\end{aligned} \tag{1.85}$$

para $p \in \overline{\Omega}$ y $0 \leq n \leq N-1$.

DEMOSTRACIÓN. Utilizando desarrollos de Taylor de la función $F(p, t)$ respecto de la variable temporal, entorno a $t_{n+\frac{1}{2}}$ y evaluando en t_n y t_{n+1} se obtiene

$$\begin{aligned}
F^n(p) &= F^{n+\frac{1}{2}}(p) - \frac{\Delta t}{2} L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) F^{n+\frac{1}{2}}(p) + \frac{\Delta t^2}{8} (\text{grad}_x \dot{\mathbf{v}})_m^{n+\frac{1}{2}}(p) F^{n+\frac{1}{2}}(p) \\
&- \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} (\text{grad}_x \ddot{\mathbf{v}})_m(p, s) F(p, s) (t_n - s)^2 ds, \\
F^{n+1}(p) &= F^{n+\frac{1}{2}}(p) + \frac{\Delta t}{2} L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) F^{n+\frac{1}{2}}(p) + \frac{\Delta t^2}{8} (\text{grad}_x \dot{\mathbf{v}})_m^{n+\frac{1}{2}}(p) F^{n+\frac{1}{2}}(p) \\
&+ \frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} (\text{grad}_x \ddot{\mathbf{v}})_m(p, s) F(p, s) (t_{n+1} - s)^2 ds,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado (1.69)-(1.71). Restando ambas ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned}
F^{n+1}(p) &= F^n(p) + \Delta t L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) F^{n+\frac{1}{2}}(p) \\
&+ \frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} (\text{grad}_x \ddot{\mathbf{v}})_m(p, s) F(p, s) (t_{n+1} - s)^2 ds \\
&+ \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} (\text{grad}_x \ddot{\mathbf{v}})_m(p, s) F(p, s) (t_n - s)^2 ds.
\end{aligned} \tag{1.86}$$

Utilizando el desarrollo de Taylor de primer orden de la función $F(p, t)$ con respecto a la variable temporal, entorno a t_n y evaluando en $t_{n+\frac{1}{2}}$ obtenemos

$$F^{n+\frac{1}{2}}(p) = F^n(p) + \frac{\Delta t}{2} L_m^n(p) F^n(p) + \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} (\text{grad}_x \dot{\mathbf{v}})_m(p, s) F(p, s) (t_{n+\frac{1}{2}} - s) ds.$$

Introduciendo esta expresión en (1.86) se consigue (1.85). \square

Proposición 1.5.6. Si $X_e \in \mathbf{C}^3(\overline{\Omega} \times [0, T])$, entonces

$$||| \nabla F^{-1} |||_{0, \infty, \overline{\Omega} \times [0, T]} \leq T e^{3T \|L\|_{0, \infty, T}} ||| \text{grad } L |||_{0, \infty, T}. \tag{1.87}$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la regla de Barrow en (1.84) y teniendo en cuenta la condición inicial del problema (1.75), obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla F^{-1}(p, t) &= - \int_0^t \nabla F^{-1}(p, s) (I, L_m(p, s)) ds \\
&- \int_0^t F^T(p, s) (\text{grad}_x L)_m(p, s) (F^{-T}(p, s), I) ds,
\end{aligned} \tag{1.88}$$

para todo $(p, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]$. Aplicando normas se deduce

$$\begin{aligned}
|||\nabla F^{-1}(p, t)||| &\leq \int_0^t |||\nabla F^{-1}(p, s)||| \|L_m(p, s)\|_2 ds \\
&+ \int_0^t \|F^T(p, s)\|_2 |||(\text{grad}_x L)_m(p, s)||| \|F^{-T}(p, s)\|_2 ds \\
&\leq \int_0^t |||\nabla F^{-1}(p, s)||| \|L_m(p, s)\|_2 ds \\
&+ Te^{2T\|L\|_{0,\infty,T}} |||\text{grad } L|||_{0,\infty,T},
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado (1.72) y (1.76). Por último, aplicando el Lema de Gronwall continuo (ver, por ejemplo, [67]) y tomando el máximo para $(p, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]$ se obtiene (1.87). \square

Proposición 1.5.7. Si $X_e \in \mathbf{C}^3(\overline{\Omega} \times [0, T])$, entonces

$$|||\nabla F|||_{0,\infty,\overline{\Omega} \times [0,T]} \leq Te^{3T\|L\|_{0,\infty,T}} |||\text{grad } L|||_{0,\infty,T}. \quad (1.89)$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es análoga a la de la Proposición 1.5.6. \square

Proposición 1.5.8. Si $X_e \in \mathbf{C}^4(\overline{\Omega} \times [0, T])$, entonces F^{-1} verifica

$$\begin{aligned}
(F^{n+1})^{-1}(p) &= (F^n)^{-1}(p) - \Delta t (F^n)^{-1}(p) L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \left(I + \frac{\Delta t}{2} L_m^n(p) \right) \\
&+ \Delta t^2 (F^n)^{-1}(p) \left(L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \right)^2 + O(\Delta t^3),
\end{aligned} \quad (1.90)$$

siendo $p \in \overline{\Omega}$, $0 \leq n \leq N-1$ y $O(\Delta t^3)$ dependiente de \mathbf{v} y T . Además si $X_e \in \mathbf{C}^4(\overline{\Omega} \times [0, T]) \cap C^3(\mathbf{C}^2(\overline{\Omega}))$, entonces se verifica

$$\begin{aligned}
\nabla (F^{n+1})^{-1}(p) &= \nabla (F^n)^{-1}(p) - \Delta t \nabla (F^n)^{-1}(p) \left(I, L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \left(I + \frac{\Delta t}{2} L_m^n(p) \right) \right) \\
&- \Delta t (F^{n+\frac{1}{2}})^T(p) (\text{grad}_x L)_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \left((F^n)^{-T}(p), \left(I + \frac{\Delta t}{2} L_m^n(p) \right) \right) \\
&- \frac{\Delta t^2}{2} (F^n)^T(p) (\text{grad}_x L)_m^n(p) \left(\left(L_m^{n+\frac{1}{2}} \right)^T(p) (F^n)^{-T}(p), I \right) \\
&+ \Delta t^2 \nabla (F^n)^{-1}(p) \left(I, \left(L_m^{n+\frac{1}{2}} \right)^2(p) \right) \\
&+ \Delta t^2 \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^T(p) (\text{grad}_x L)_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \left((F^n)^{-T}(p), L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \right) \\
&+ \Delta t^2 \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^T(p) (\text{grad}_x L)_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \left(\left(L_m^{n+\frac{1}{2}} \right)^T(p) (F^n)^{-T}(p), I \right) \\
&+ O(\Delta t^3),
\end{aligned} \quad (1.91)$$

siendo $p \in \overline{\Omega}$, $0 \leq n \leq N-1$ y $O(\Delta t^3)$ dependiente de \mathbf{v} y T .

DEMOSTRACIÓN. Análogamente a la demostración de la Proposición 1.5.5 se deduce

$$\begin{aligned}
(F^{n+1})^{-1}(p) &= (F^n)^{-1}(p) - \Delta t (F^n)^{-1}(p) \left(I - \frac{\Delta t}{2} L_m^n(p) \right) L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \\
&- \frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} F^{-1}(p, s) (6L_m^3(p, s) - 3L_m(p, s)(\text{grad}_x \dot{\mathbf{v}})_m(p, s) \\
&- (\text{grad}_x \dot{\mathbf{v}})_m(p, s)L_m(p, s) + (\text{grad}_x \ddot{\mathbf{v}})_m(p, s)) (t_{n+1} - s)^2 ds \\
&- \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} F^{-1}(p, s) (6L_m^3(p, s) - 3L_m(p, s)(\text{grad}_x \dot{\mathbf{v}})_m(p, s) \\
&- (\text{grad}_x \dot{\mathbf{v}})_m(p, s)L_m(p, s) + (\text{grad}_x \ddot{\mathbf{v}})_m(p, s)) (t_n - s)^2 ds \\
&- \Delta t \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} F^{-1}(p, s) (2L_m^2(p, s) - (\text{grad}_x \dot{\mathbf{v}})_m(p, s)) (t_{n+\frac{1}{2}} - s) ds \\
&L_m^{n+\frac{1}{2}}(p),
\end{aligned} \tag{1.92}$$

donde hemos utilizado (1.75), (1.82) y (1.83). Utilizando la regla de Barrow se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} L_m^n(p) L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) &= \frac{1}{2} \left(L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \dot{L}_m(p, s) ds \right) L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \\
&= \left(L_m^{n+\frac{1}{2}} \right)^2(p) - \frac{1}{2} L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) L_m^n(p) - \left(\frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \dot{L}_m(p, s) ds \right) L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \\
&\quad - \frac{1}{2} L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \dot{L}_m(p, s) ds.
\end{aligned}$$

Entonces, introduciendo esta expresión en (1.92) y teniendo en cuenta (1.76) se deduce (1.90). Si $X_e \in \mathbf{C}^4(\bar{\Omega} \times [0, T]) \cap C^3(\mathbf{C}^2(\bar{\Omega}))$, podemos derivar las expresiones obtenidas respecto a la variable espacial. Entonces, aplicando las Proposiciones 1.2.1 y 1.2.3 y teniendo en cuenta la ecuación (1.73), la análoga para F^{-1} y (1.87) se deduce (1.91). \square

Proposición 1.5.9. *Si $X_e \in \mathbf{C}^4(\bar{\Omega} \times [0, T])$, entonces*

$$\begin{aligned}
\det F^{n+1}(p) &= \det F^n(p) + \Delta t \det F^n(p) (\text{div}_x \mathbf{v})_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2} \det F^n(p) L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \cdot (L_m^n)^T(p) \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2} \det F^n(p) ((\text{div}_x \mathbf{v})_m^{n+\frac{1}{2}}(p))^2 \\
&- \frac{\Delta t^2}{2} \det F^n(p) L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \cdot \left(L_m^{n+\frac{1}{2}} \right)^T(p) + O(\Delta t^3),
\end{aligned} \tag{1.93}$$

siendo $p \in \bar{\Omega}$, $0 \leq n \leq N-1$ y $O(\Delta t^3)$ dependiente de \mathbf{v} y T . Además si $X_e \in \mathbf{C}^4(\bar{\Omega} \times [0, T]) \cap C^3(\mathbf{C}^2(\bar{\Omega}))$,

entonces se verifica

$$\begin{aligned}
\nabla \det F^{n+1}(p) &= \nabla \det F^n(p) + \Delta t \nabla \det F^n(p) (\operatorname{div}_x \mathbf{v})_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \\
&+ \Delta t \det F^n(p) \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^T(p) (\operatorname{grad}_x (\operatorname{div}_x \mathbf{v})_m^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^2}{2} \nabla \det F^n(p) L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \cdot (L_m^n)^T(p) \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2} \det F^n(p) \left\{ \operatorname{Tr} \left((F^n)^T(p) (\operatorname{grad}_x L_m^n(p) \left(\left(L_m^{n+\frac{1}{2}} \right)^T(p), I \right) \right) \right. \\
&+ \left. \operatorname{Tr} \left(\left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^T(p) (\operatorname{grad}_x L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) (I, L_m^n(p)) \right) \right\} + \frac{\Delta t^2}{2} \nabla \det F^n(p) ((\operatorname{div}_x \mathbf{v})_m^{n+\frac{1}{2}}(p))^2 \\
&+ \Delta t^2 \det F^n(p) (\operatorname{div}_x \mathbf{v})_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^T(p) (\operatorname{grad}_x (\operatorname{div}_x \mathbf{v})_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \\
&- \frac{\Delta t^2}{2} \nabla \det F^n(p) L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \cdot \left(L_m^{n+\frac{1}{2}} \right)^T(p) \\
&- \Delta t^2 \det F^n(p) \operatorname{Tr} \left(\left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^T(p) (\operatorname{grad}_x L_m^{n+\frac{1}{2}}(p) \left(\left(L_m^{n+\frac{1}{2}} \right)^T(p), I \right) \right) + O(\Delta t^3),
\end{aligned} \tag{1.94}$$

siendo $p \in \overline{\Omega}$, $0 \leq n \leq N-1$ y $O(\Delta t^3)$ dependiente de \mathbf{v} y T .

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, a partir de (1.85) se deduce

$$F^{n+1}(p) = (M_e^n(p) + R_e^n(p)(F^n)^{-1}(p)) F^n(p), \tag{1.95}$$

siendo

$$\begin{aligned}
M_e^n(p) &= I + \Delta t L^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) \left(I + \frac{\Delta t}{2} L^n(X_e^n(p)) \right), \\
R_e^n(p) &= \frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \operatorname{grad}_x \ddot{\mathbf{v}}(X_e(p, s), s) F(p, s) (t_{n+1} - s)^2 ds \\
&+ \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \operatorname{grad}_x \ddot{\mathbf{v}}(X_e(p, s), s) F(p, s) (t_n - s)^2 ds \\
&+ \Delta t L^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \operatorname{grad}_x \dot{\mathbf{v}}(X_e(p, s), s) F(p, s) (t_{n+\frac{1}{2}} - s) ds.
\end{aligned}$$

Además se verifican las siguientes propiedades

$$\det(MB) = \det M \det B, \tag{1.96}$$

$$\det(I + N) = 1 + \operatorname{tr}(N) + \frac{1}{2}((\operatorname{tr}(N))^2 - \operatorname{tr} N^2) \quad \text{si } d = 2, \tag{1.97}$$

$$\det(I + N) = 1 + \operatorname{tr}(N) + \frac{1}{2}((\operatorname{tr}(N))^2 - \operatorname{tr} N^2) + \det N \quad \text{si } d = 3, \tag{1.98}$$

siendo M y N tensores cualesquiera. Entonces, aplicando determinantes en (1.95), las expresiones anteriores con

$$M = M_e^n(p) + R_e^n(p)(F^n)^{-1}(p), \quad B = F^n(p), \quad N = M_e^n(p) - I + R_e^n(p)(F^n)^{-1}(p),$$

y teniendo en cuenta (1.72), (1.76) y (1.78) se deduce (1.93). Si $X_e \in \mathbf{C}^4(\overline{\Omega} \times [0, T]) \cap C^3(\mathbf{C}^2(\overline{\Omega}))$, derivando las expresiones obtenidas respecto a la variable espacial y teniendo en cuenta las Proposiciones 1.2.1 y 1.2.4 y el Corolario 1.2.1 y (1.72), (1.76), (1.78), (1.81), (1.87) y (1.89) se obtiene (1.94). \square

Nota 1.5.3. Si $X_e \in \mathbf{C}^3(\overline{\Omega} \times [0, T])$ entonces $((\det F)^\cdot)^\cdot$ y $\nabla((\det F)^\cdot)^\cdot$ existen y son continuas; concretamente derivando, respectivamente, la primera ecuación de (1.77) respecto de t y aplicando gradientes en dicha ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} ((\det F)^\cdot)^\cdot &= (\det F)^\cdot (\operatorname{div} \mathbf{v})_m + \det F (\operatorname{div} \dot{\mathbf{v}})_m \\ &= \det F ((\operatorname{div} \mathbf{v})_m^2 + (\operatorname{div} \dot{\mathbf{v}})_m), \\ \nabla((\det F)^\cdot)^\cdot &= \nabla(\det F) (\operatorname{div} \mathbf{v})_m + \det F F^T (\operatorname{grad} (\operatorname{div} \dot{\mathbf{v}}))_m, \end{aligned} \quad (1.99)$$

además teniendo en cuenta (1.69), (1.70) y (1.75) se deduce

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \dot{\mathbf{v}})_m &= \left[\operatorname{tr} \left(\frac{\partial F}{\partial t} F^{-1} \right) \right]^\cdot = \operatorname{tr} \left([\dot{F} F^{-1}]^\cdot \right) \\ &= \operatorname{tr} \left(\ddot{F} F^{-1} + \dot{F} (F^{-1})^\cdot \right) = \operatorname{tr} ((\operatorname{grad} \dot{\mathbf{v}})_m - L_m^2) \\ &= (\operatorname{div} \dot{\mathbf{v}})_m - L_m \cdot L_m^T. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Entonces introduciendo esta expresión en (1.99) se obtiene

$$((\det F)^\cdot)^\cdot = \det F ((\operatorname{div} \mathbf{v})_m^2 + (\operatorname{div} \dot{\mathbf{v}})_m - L_m \cdot L_m^T), \quad (1.101)$$

Análogamente si $X_e \in \mathbf{C}^3(\overline{\Omega} \times [0, T]) \cap C^2(\mathbf{C}^2(\overline{\Omega}))$ entonces $\nabla(((\det F)^\cdot)^\cdot)$ existe y es continua; concretamente aplicando gradientes en (1.101) se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla(((\det F)^\cdot)^\cdot) &= \nabla(\det F) ((\operatorname{div} \mathbf{v})_m^2 + (\operatorname{div} \dot{\mathbf{v}})_m - L_m \cdot L_m^T) \\ &\quad + \det F \{ 2(\operatorname{div} \mathbf{v})_m F^T (\operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{v}))_m \\ &\quad + F^T (\operatorname{grad} (\operatorname{div} \dot{\mathbf{v}}))_m - 2 \operatorname{Tr} (F^T (\operatorname{grad} L)_m (L_m^T, I)) \}, \end{aligned} \quad (1.102)$$

donde hemos aplicado la Proposición 1.2.1 con

$$\mathcal{A} = \Omega, \quad Y = X_e(\cdot, t), \quad G = L(\cdot, t),$$

y el Corolario 1.2.1 con

$$\mathcal{A} = \Omega, \quad G = L_m(\cdot, t),$$

para cada $t \in [0, T]$.

1.5.2. Aproximación de las curvas características

En la mayoría de los casos el problema de Cauchy (1.68) no se puede resolver exactamente por lo que utilizamos distintas fórmulas numéricas para aproximar $X_e(p, t_{n+1})$:

- Método explícito de Euler de primer orden. En el instante inicial consideramos

$$X_E^0(p) := p \quad \forall p \in \overline{\Omega}, \quad (1.103)$$

y para cada $0 \leq n \leq N-1$, definimos por recurrencia

$$X_E^{n+1}(p) := X_E^n(p) + \Delta t \mathbf{v}^n(X_E^n(p)) \quad \forall p \in \overline{\Omega}. \quad (1.104)$$

- Método Runge-Kutta explícito de segundo orden. En el instante inicial consideramos

$$X_{RK}^0(p) := p \quad \forall p \in \overline{\Omega}, \quad (1.105)$$

y para cada $0 \leq n \leq N-1$, definimos por recurrencia

$$X_{RK}^{n+1}(p) := X_{RK}^n(p) + \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) \quad \forall p \in \overline{\Omega}, \quad (1.106)$$

siendo

$$Y^n(p) := X_{RK}^n(p) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(X_{RK}^n(p)). \quad (1.107)$$

- Método Runge-Kutta explícito de tercer orden. En el instante inicial consideramos

$$X_{RK2}^0(p) := p \quad \forall p \in \overline{\Omega}, \quad (1.108)$$

y para cada $0 \leq n \leq N-1$, definimos por recurrencia

$$X_{RK2}^{n+1}(p) := X_{RK2}^n(p) + \frac{\Delta t}{6} \left(\mathbf{v}^n(X_{RK2}^n(p)) + 4\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y_1^n(p)) + \mathbf{v}^{n+1}(Y_2^n(p)) \right), \quad (1.109)$$

para todo $p \in \overline{\Omega}$, siendo

$$Y_1^n(p) := X_{RK2}^n(p) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(X_{RK2}^n(p)), \quad (1.110)$$

$$Y_2^n(p) := X_{RK2}^n(p) + \Delta t \mathbf{v}^{n+1} \left(X_{RK2}^n(p) + \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y_1^n(p)) \right). \quad (1.111)$$

Empleamos una notación análoga para denotar las aproximaciones del gradiente del movimiento, que se consideran los gradientes de las características aproximadas, es decir

$$F_i^n(p) := \nabla X_i^n(p),$$

para $p \in \overline{\Omega}$, $0 \leq n \leq N$ e $i = E, RK, RK2$. Concretamente, en el instante inicial se tiene

$$F_E^0(p) = F_{RK}^0(p) = F_{RK2}^0(p) = I, \quad (1.112)$$

y para cada $0 \leq n \leq N-1$, se verifica

$$F_E^{n+1}(p) = F_E^n(p) + \Delta t L^n(X_E^n(p)) F_E^n(p), \quad (1.113)$$

$$\begin{aligned} F_{RK}^{n+1}(p) &= F_{RK}^n(p) \\ &+ \Delta t L^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) \left(I + \frac{\Delta t}{2} L^n(X_{RK}^n(p)) \right) F_{RK}^n(p), \end{aligned} \quad (1.114)$$

$$\begin{aligned} F_{RK2}^{n+1}(p) &= F_{RK2}^n(p) + \frac{\Delta t}{6} \{ L^n(X_{RK2}^n(p)) \\ &+ 4L^{n+\frac{1}{2}}(Y_1^n(p)) G_1^n(p) + L^{n+1}(Y_2^n(p)) G_2^n(p) \} F_{RK2}^n(p), \end{aligned} \quad (1.115)$$

donde

$$G_1^n(p) := \left(I + \frac{\Delta t}{2} L^n(X_{RK2}^n(p)) \right), \quad (1.116)$$

$$\begin{aligned} G_2^n(p) &:= I + \Delta t L^{n+1} \left(X_{RK2}^n(p) + \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y_1^n(p)) \right) \\ &\quad \left(I + \Delta t L^{n+\frac{1}{2}}(Y_1^n(p)) G_1^n(p) \right), \end{aligned} \quad (1.117)$$

siendo $L^n(x) := \text{grad } \mathbf{v}(x, t_n)$.

A continuación probamos algunas propiedades que verifican las curvas características aproximadas.

Hipótesis 1.1. Existe un parámetro $\delta > 0$ tal que \mathbf{v} está definida en

$$\mathcal{T}^\delta = \bigcup_{t \in [0, T]} \overline{\Omega}_t^\delta \times \{t\}, \quad (1.118)$$

siendo

$$\Omega_t^\delta = \bigcup_{x \in \overline{\Omega}_t} B(x, \delta). \quad (1.119)$$

Además $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^1(\mathcal{T}^\delta)$.

Análogamente a la definición del conjunto \mathcal{O} en (1.3), consideramos el siguiente conjunto

$$\mathcal{O}^\delta := \bigcup_{t \in [0, T]} \overline{\Omega}_t^\delta, \quad (1.120)$$

también introducimos el siguiente conjunto

$$\mathcal{T}_{\Gamma^R}^\delta := \bigcup_{t \in [0, T]} \overline{G}_t^\delta \times \{t\}, \quad (1.121)$$

siendo

$$G_t^\delta = \bigcup_{x \in \Gamma_t^R} B(x, \delta). \quad (1.122)$$

Introducimos la constante

$$c := \max \left(\|\mathbf{v}_m\|_{C^1(\mathbf{L}^\infty(\Omega))}, \|\text{grad } \mathbf{v}\|_{0, \infty, \mathcal{T}^\delta} \right). \quad (1.123)$$

Lema 1.5.1. Supongamos que se cumple la Hipótesis 1.1, entonces existe un parámetro $\eta > 0$ tal que si $\Delta t < \eta$, $\forall n \in \{0, \dots, N\}$ y para $i = E, RK, RK2$, $X_i^n(p)$, está definido para todo $p \in \overline{\Omega}$, y además

$$X_i^n(\overline{\Omega}) \subset \Omega_{t_n}^\delta.$$

DEMOSTRACIÓN.

- Aproximación de Euler. Sea $p \in \overline{\Omega}$. Dado $n \geq 1$, por la definición de X_E^n (1.104), se deduce que $X_E^n(p)$ está bien definido si $X_E^{n-1}(p) \in \Omega_{t_{n-1}}^\delta$. Entonces si probamos que $X_E^n(\overline{\Omega}) \subset \Omega_{t_n}^\delta$, para $0 \leq n \leq N$, se obtiene el resultado, para ello procederemos por inducción. Para $n = 0$ trivialmente la aplicación X_E^0 está bien definida en $\overline{\Omega}$ y además $X_E^0(p) = p \in \overline{\Omega} \subset \Omega_0^\delta$. Sea $1 \leq n \leq N$, supongamos que $X_E^i(p) \in \Omega_{t_i}^\delta$ para $i = 0, \dots, n-1$, veamos que $X_E^n(p) \in \Omega_{t_n}^\delta$. En primer lugar, utilizando un desarrollo de Taylor de la función $X_e(p, \cdot)$ y la regularidad de la velocidad $\mathbf{v}(\cdot, t)$ se deduce

$$\begin{aligned} |X_E^i(p) - X_e(p, t_i)| &= |X_E^{i-1}(p) + \Delta t \mathbf{v}^{i-1}(X_E^{i-1}(p)) - X_e(p, t_i)| \\ &\leq |X_E^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1})| + |\Delta t \mathbf{v}^{i-1}(X_E^{i-1}(p)) - (X_e(p, t_i) - X_e(p, t_{i-1}))| \\ &\leq |X_E^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1})| + |\Delta t \mathbf{v}^{i-1}(X_E^{i-1}(p)) - \Delta t \mathbf{v}^{i-1}(X_e(p, t_{i-1}))| + \Delta t^2 c \\ &\leq |X_E^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1})| + \Delta t c |X_E^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1})| + \Delta t^2 c \\ &= (1 + \Delta t c) |X_E^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1})| + \Delta t^2 c \\ &\leq \exp(\Delta t c) |X_E^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1})| + \Delta t^2 c \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.124)$$

Entonces, por inducción, se demuestra

$$|X_E^n(p) - X_e(p, t_n)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \exp(k\Delta t c) \Delta t^2 c, \quad (1.125)$$

en particular, se tiene

$$|X_E^n(p) - X_e(p, t_n)| \leq \exp(Tc) Tc \Delta t. \quad (1.126)$$

Como consecuencia, tomando $\eta < \frac{\delta}{\exp(Tc)Tc}$, se obtiene el resultado.

- Aproximación Runge-Kutta de segundo orden. Al igual que en el caso anterior probaremos el resultado por inducción. Sea $p \in \overline{\Omega}$. Para $n = 0$ trivialmente la aplicación X_{RK}^0 está bien definida en $\overline{\Omega}$ y además $X_{RK}^0(p) = p \in \overline{\Omega} \subset \Omega_0^\delta$. Sea $1 \leq n \leq N$, supongamos que $X_{RK}^i(p)$ está bien definido y $X_{RK}^i(p) \in \Omega_{t_i}^\delta$, para $i = 0, \dots, n-1$, veamos que $X_{RK}^n(p)$ también lo verifica. En primer lugar, procediendo de forma análoga a la aproximación de Euler, se tiene

$$|Y^i(p) - X_e(p, t_{i+\frac{1}{2}})| \leq \exp\left(\frac{\Delta t}{2}c\right) |X_{RK}^i(p) - X_e(p, t_i)| + \frac{\Delta t^2}{4}c \quad (1.127)$$

donde $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Además, utilizando desarrollos de Taylor y la regularidad de la velocidad $\mathbf{v}(\cdot, t)$, se obtiene

$$\begin{aligned} |X_{RK}^i(p) - X_e(p, t_i)| &= |X_{RK}^{i-1}(p) + \Delta t \mathbf{v}^{i-\frac{1}{2}}(Y^{i-1}(p)) - X_e(p, t_i)| \\ &= |X_{RK}^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1}) + \Delta t \mathbf{v}^{i-\frac{1}{2}}(Y^{i-1}(p)) - (X_e(p, t_i) - X_e(p, t_{i-\frac{1}{2}})) \\ &\quad + (X_e(p, t_{i-1}) - X_e(p, t_{i-\frac{1}{2}}))| \\ &\leq |X_{RK}^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1})| + \Delta t c |Y^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-\frac{1}{2}})| + \frac{\Delta t^2}{2}c \\ &\leq \left(1 + c\Delta t \exp\left(\frac{\Delta t}{2}c\right)\right) |X_{RK}^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1})| + \frac{\Delta t^2}{2}c + \frac{\Delta t^3}{4}c^2 \\ &\leq \exp\left(c\Delta t \exp\left(\frac{\Delta t}{2}c\right)\right) |X_{RK}^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1})| + \frac{\Delta t^2}{2}c + \frac{\Delta t^3}{4}c^2, \end{aligned} \quad (1.128)$$

donde también hemos aplicado la desigualdad (1.127). Por inducción, se demuestra

$$|X_{RK}^i(p) - X_e(p, t_i)| \leq \sum_{k=0}^{i-1} \exp\left(k\Delta t c \exp\left(\frac{\Delta t}{2}c\right)\right) \left(\frac{\Delta t^2}{2}c + \frac{\Delta t^3}{4}c^2\right),$$

en particular, se tiene

$$|X_{RK}^i(p) - X_e(p, t_i)| \leq \exp\left(Tc \exp\left(\frac{\Delta t}{2}c\right)\right) \frac{T}{2}c\Delta t \left(1 + \frac{\Delta t}{2}c\right), \quad (1.129)$$

donde $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Aplicando la desigualdad (1.127) y (1.129) para $i = n-1$ se tiene

$$\begin{aligned} |Y^{n-1}(p) - X_e(p, t_{n-\frac{1}{2}})| &\leq \exp\left(\frac{\Delta t}{2}c\right) \exp\left(Tc \exp\left(\frac{\Delta t}{2}c\right)\right) \frac{T}{2}c\Delta t \left(1 + \frac{\Delta t}{2}c\right) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{4}c. \end{aligned}$$

Entonces considerando $\eta < \min\left\{\frac{1}{c}, \frac{4\delta}{3\exp(\frac{1}{2}+Tc\exp(\frac{1}{2}))Tc+1}\right\}$ se tiene que $Y^{n-1}(\overline{\Omega}) \subset \Omega_{t_{n-1}}^\delta$, por lo que $X_{RK}^n(p)$ está bien definido $\forall p \in \overline{\Omega}$. Por último, aplicando la desigualdad (1.129) para $i = n$ y utilizando que $\eta < \min\left\{\frac{1}{c}, \frac{4\delta}{3\exp(\frac{1}{2}+Tc\exp(\frac{1}{2}))Tc+1}\right\}$ se deduce que $X_{RK}^n(p) \in \Omega_{t_n}^\delta$.

- *Aproximación Runge-Kutta de tercer orden*. Al igual que en los apartados anteriores probaremos el resultado por inducción. Sea $p \in \overline{\Omega}$. Para $n = 0$ trivialmente la aplicación X_{RK2}^0 está bien definida en $\overline{\Omega}$ y además $X_{RK2}^0(p) = p \in \overline{\Omega} \subset \Omega_0^\delta$. Sea $1 \leq n \leq N$, supongamos que $X_{RK2}^i(p)$ está bien definido y $X_{RK2}^i(p) \in \Omega_{t_i}^\delta$, para $i = 0, \dots, n-1$, veamos que $X_{RK2}^n(p)$ también lo verifica. En particular, por la definición de $X_{RK2}^i(p)$ (1.109), se tiene que $X_{RK2}^{i-1}(p) \in \Omega_{t_{i-1}}^\delta$, $Y_1^{i-1}(p) \in \Omega_{t_{i-\frac{1}{2}}}^\delta$ y $X_{RK2}^{i-1}(p) + \Delta t \mathbf{v}^{i-\frac{1}{2}}(Y_1^{i-1}(p))$, $Y_2^{i-1}(p) \in \Omega_{t_i}^\delta$; veamos que también se verifican para $i = n$, por lo que se tendrá que $X_{RK2}^n(p)$ está bien definido. En primer lugar, a partir de las estimaciones obtenidas para la aproximación de Runge-Kutta de segundo orden obtenemos

$$|Y_1^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-\frac{1}{2}})| \leq \exp\left(\frac{\Delta t}{2}c\right) |X_{RK2}^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1})| + \frac{\Delta t^2}{4}c, \quad (1.130)$$

$$\begin{aligned} & |X_{RK2}^{i-1}(p) + \Delta t \mathbf{v}^{i-\frac{1}{2}}(Y_1^{i-1}(p)) - X_e(p, t_i)| \\ & \leq \left(1 + c\Delta t \exp\left(\frac{\Delta t}{2}c\right)\right) |X_{RK2}^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1})| + \frac{\Delta t^2}{2}c + \frac{\Delta t^3}{4}c^2, \end{aligned} \quad (1.131)$$

donde $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Utilizando un desarrollo de Taylor, la regularidad de la velocidad $\mathbf{v}(\cdot, t)$, partiendo de la desigualdad (1.131) y suponiendo que $\Delta tc < 1$, se deduce

$$\begin{aligned} & |Y_2^{i-1}(p) - X_e(p, t_i)| = |X_{RK2}^{i-1}(p) + \Delta t \mathbf{v}^i(X_{RK2}^{i-1}(p) + \Delta t \mathbf{v}^{i-\frac{1}{2}}(Y_1^{i-1}(p))) - X_e(p, t_i)| \\ & = |X_{RK2}^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1}) + \Delta t \mathbf{v}^i(X_{RK2}^{i-1}(p) + \Delta t \mathbf{v}^{i-\frac{1}{2}}(Y_1^{i-1}(p))) - (X_e(p, t_i) - X_e(p, t_{i-1}))| \\ & \leq |X_{RK2}^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1})| + |\Delta t \mathbf{v}^i(X_{RK2}^{i-1}(p) + \Delta t \mathbf{v}^{i-\frac{1}{2}}(Y_1^{i-1}(p))) - \Delta t \mathbf{v}^i(X_e(p, t_i))| \\ & + \Delta t^2 c \leq |X_{RK2}^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1})| + \Delta tc |X_{RK2}^{i-1}(p) + \Delta t \mathbf{v}^{i-\frac{1}{2}}(Y_1^{i-1}(p)) - X_e(p, t_i)| \\ & + \Delta t^2 c \leq c_1 |X_{RK2}^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1})| + \Delta t^2 c + \frac{\Delta t^3}{2}c^2 + \frac{\Delta t^4}{4}c^3. \end{aligned} \quad (1.132)$$

Siendo $c_1 = 2 + e^{1/2}$ e $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Entonces, utilizando desarrollos de Taylor adecuados, la regularidad de la velocidad $\mathbf{v}(\cdot, t)$ y las desigualdades (1.130) y (1.132), se verifica

$$\begin{aligned} & |X_{RK2}^i(p) - X_e(p, t_i)| = |X_{RK2}^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1}) + X_e(p, t_{i-1}) - X_e(p, t_{i-\frac{1}{2}})| \\ & + \frac{\Delta t}{6} \left(\mathbf{v}^{i-1}(X_{RK2}^{i-1}(p)) + 4\mathbf{v}^{i-\frac{1}{2}}(Y_1^{i-1}(p)) + \mathbf{v}^i(Y_2^{i-1}(p)) \right) - (X_e(p, t_i) - X_e(p, t_{i-\frac{1}{2}}))| \\ & \leq |X_{RK2}^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1})| + |-\Delta t \mathbf{v}^{i-\frac{1}{2}}(X_e(p, t_{i-\frac{1}{2}}))| + \\ & \frac{\Delta t}{6} \left(\mathbf{v}^{i-1}(X_{RK2}^{i-1}(p)) + 4\mathbf{v}^{i-\frac{1}{2}}(Y_1^{i-1}(p)) + \mathbf{v}^i(Y_2^{i-1}(p)) \right) + \frac{\Delta t^2}{2}c \\ & \leq |X_{RK2}^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1})| + |-\frac{\Delta t}{6} \left(\mathbf{v}^{i-1}(X_e(p, t_{i-1})) + 4\mathbf{v}^{i-\frac{1}{2}}(X_e(p, t_{i-\frac{1}{2}})) + \mathbf{v}^i(X_e(p, t_i)) \right)| \\ & + \frac{\Delta t}{6} \left(\mathbf{v}^{i-1}(X_{RK2}^{i-1}(p)) + 4\mathbf{v}^{i-\frac{1}{2}}(Y_1^{i-1}(p)) + \mathbf{v}^i(Y_2^{i-1}(p)) \right) + \frac{2\Delta t^2}{3}c \\ & \leq \left(1 + \frac{\Delta t}{6}c\right) |X_{RK2}^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1})| \\ & + \frac{\Delta t}{6}c \left(4|Y_1^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-\frac{1}{2}})| + |Y_2^{i-1}(p) - X_e(p, t_i)| \right) + \frac{2\Delta t^2}{3}c \\ & \leq \left(1 + \frac{\Delta t}{6}c \left(1 + 4e^{1/2} + c_1\right)\right) |X_{RK2}^{i-1}(p) - X_e(p, t_{i-1})| \\ & + \frac{2\Delta t^2}{3}c + \frac{\Delta t^3}{3}c^2 + \frac{\Delta t^4}{12}c^3 + \frac{\Delta t^5}{24}c^4 \quad i \in 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

donde hemos considerado que $\Delta tc < 1$. Por inducción, se demuestra

$$|X_{RK2}^i(p) - X_e(p, t_i)| \leq \sum_{k=0}^{i-1} \left(1 + \frac{\Delta t}{6} cc_2\right)^k \left(\frac{2\Delta t^2}{3}c + \frac{\Delta t^3}{3}c^2 + \frac{\Delta t^4}{12}c^3 + \frac{\Delta t^5}{24}c^4\right),$$

donde $c_2 = 1 + 4e^{1/2} + c_1$. En particular, si $\Delta tc < 1$, se tiene

$$|X_{RK2}^i(p) - X_e(p, t_i)| \leq \frac{9}{8} \exp\left(\frac{T}{6} cc_2\right) T c \Delta t. \quad (1.133)$$

Teniendo en cuenta que, por la hipótesis de inducción $X_{RK2}^i \in \Omega_{t_i}^\delta$, para $i \in \{0, \dots, n-1\}$ podemos aplicar la estimación (1.130) con $i = n$ y por (1.133), se tiene

$$|Y_1^{n-1}(p) - X_e(p, t_{n+\frac{1}{2}})| \leq \frac{9}{8} \exp\left(\frac{1}{2}\right) \exp\left(\frac{T}{6} cc_2\right) T c \Delta t + \frac{\Delta t}{4}.$$

Entonces si $\eta < \min \left\{ \frac{1}{c}, \frac{\delta}{\frac{9}{8} \exp(\frac{1}{2}) \exp(\frac{T}{6} cc_2) T c + \frac{1}{4}} \right\}$ se verifica que $Y_1^{n-1}(p) \in \Omega_{t_{n-\frac{1}{2}}}^\delta$ y por tanto podemos aplicar la estimación (1.131) con $i = n$ y por (1.133), se cumple

$$\begin{aligned} & |X_{RK2}^{n-1}(p) + \Delta t \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}}(Y_1^{n-1}(p)) - X_e(p, t_n)| \\ & \leq (1 + \exp(1/2)) \frac{9}{8} \exp\left(\frac{T}{6} cc_2\right) T \Delta tc + \frac{3\Delta t}{4}. \end{aligned}$$

Entonces si $\eta < \min \left\{ \frac{1}{c}, \frac{\delta}{\frac{9}{8}(1+\exp(\frac{1}{2})) \exp(\frac{T}{6} cc_2) T c + \frac{3}{4}} \right\}$ se tiene que

$$X_{RK2}^{n-1}(p) + \Delta t \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}}(Y_1^n(p)) \in \Omega_{t_n}^\delta.$$

Veamos que también $Y_2^{n-1}(p) \in \Omega_{t_n}^\delta$. Utilizando (1.132) con $i = n$, y la desigualdad (1.133) se deduce

$$|Y_2^{n-1}(p) - X_e(p, t_n)| \leq c_1 \frac{9}{8} \exp\left(\frac{T}{6} cc_2\right) T \Delta tc + \frac{7}{4} \Delta t,$$

donde hemos considerado que $\Delta tc < 1$. Entonces tomando $\eta < \min \left\{ \frac{1}{c}, \frac{\delta}{\frac{9}{8} c_1 \exp(\frac{T}{6} cc_2) T c + \frac{7}{4}} \right\}$ se tiene que $X_{RK2}^n(p)$ está bien definido $\forall p \in \bar{\Omega}$. Veamos por último que además $X_{RK2}^n(\bar{\Omega}) \subset \Omega_{t_n}^\delta$. En efecto, aplicando la desigualdad (1.133) para $i = n$ y teniendo en cuenta la elección de η se obtiene el resultado. \square

Corolario 1.5.2. *Supongamos que se cumplen las hipótesis del lema previo y además $\Delta t < \eta$, siendo η la constante que aparece en dicho lema. Entonces $F_i^n(p)$, con $i = E, RK, RK2$, está bien definido para todo $p \in \bar{\Omega}$ y $\forall n \in \{0, \dots, N\}$.*

A continuación se demuestran ciertas propiedades, conocidas para el movimiento X_e , que también cumplen sus aproximaciones.

Lema 1.5.2. *Supongamos que se cumple la Hipótesis 1.1 y además $\Delta t < \eta$, entonces existe una constante positiva C que depende de \mathbf{v} tal que*

$$\|F_i^n\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} \leq e^{T(\|L\|_{0,\infty,\mathcal{T}^\delta} + C\Delta t)}, \quad (1.134)$$

para $0 \leq n \leq N$ e $i = E, RK, RK2$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar se observa que podemos escribir $F_i^{n+1}(p)$, para $i = E, RK, RK2$, como

$$F_i^{n+1}(p) = F_i^n(p) + \left(\Delta t \widehat{L}_i^n(p) + \Delta t^2 R_i^n(p) \right) F_i^n(p) \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (1.135)$$

siendo

$$\widehat{L}_E^n(p) := L^n(X_E^n(p)), \quad (1.136)$$

$$\widehat{L}_{RK}^n(p) := L^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)), \quad (1.137)$$

$$\widehat{L}_{RK2}^n(p) := \frac{1}{6} \{ L^n(X_{RK2}^n(p)) + 4L^{n+\frac{1}{2}}(Y_1^n(p)) + L^{n+1}(Y_2^n(p)) \}, \quad (1.138)$$

y $R_i^n(p)$ un tensor acotado superiormente por una constante independiente de p y n (pero depende de L), es decir

$$\|R_i^n\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} \leq C.$$

Por lo tanto, por inducción se comprueba

$$F_i^n(p) = I + \sum_{s=0}^{n-1} \left(\Delta t \widehat{L}_i^s(p) + \Delta t^2 R_i^s(p) \right) F_i^s(p) \quad 0 \leq n \leq N.$$

Aplicando normas se deduce

$$\|F_i^n(p)\|_2 \leq 1 + \sum_{s=0}^{n-1} \|F_i^s(p)\|_2 \left(\Delta t \|\widehat{L}_i^s(p)\|_2 + C\Delta t^2 \right).$$

Aplicando el Lema de Gronwall en su versión discreta a la sucesión $\|F_i^n(p)\|_2$ se obtiene

$$\|F_i^n(p)\|_2 \leq \exp \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \left(\Delta t \|\widehat{L}_i^s(p)\|_2 + C\Delta t^2 \right) \right\}.$$

Por último, teniendo en cuenta (1.136)-(1.138) se deduce

$$\|\widehat{L}_i^n(p)\|_2 \leq \|L\|_{0,\infty,\mathcal{T}^\delta},$$

de donde se obtiene el resultado. □

Lema 1.5.3. *Supongamos que se cumple la Hipótesis 1.1 y además $\Delta t < \min\{\eta, \frac{1}{2c}\}$. Entonces F_i^{n+1} son invertibles, para $i = E, RK, RK2$. Además, sus respectivas inversas verifican*

$$\begin{aligned} (F_E^{n+1})^{-1}(p) &= (F_E^n)^{-1}(p) - \Delta t (F_E^n)^{-1}(p) L^n(X_E^n(p)) \\ &\quad + \Delta t^2 (F_E^n)^{-1}(p) (L^n(X_E^n(p)))^2 + O(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (1.139)$$

$$\begin{aligned} (F_{RK}^{n+1})^{-1}(p) &= (F_{RK}^n)^{-1}(p) - \Delta t (F_{RK}^n)^{-1}(p) L^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) \left(I + \frac{\Delta t}{2} L^n(X_{RK}^n(p)) \right) \\ &\quad + \Delta t^2 (F_{RK}^n)^{-1}(p) (L^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)))^2 + O(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (1.140)$$

$$\begin{aligned} (F_{RK2}^{n+1})^{-1}(p) &= (F_{RK2}^n)^{-1}(p) - \frac{\Delta t}{6} (F_{RK2}^n)^{-1}(p) \{ L^n(X_{RK2}^n(p)) \\ &\quad + 4L^{n+\frac{1}{2}}(Y_1^n(p))G_1^n(p) + L^{n+1}(Y_2^n(p))G_2^n(p) \} \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{36} (F_{RK2}^n)^{-1}(p) [(L^n)^2(X_{RK2}^n(p)) + 4L^n(X_{RK2}^n(p))L^{n+\frac{1}{2}}(Y_1^n(p)) \\ &\quad + L^n(X_{RK2}^n(p))L^{n+1}(Y_2^n(p)) + 4L^{n+\frac{1}{2}}(Y_1^n(p))L^n(X_{RK2}^n(p)) + 16(L^{n+\frac{1}{2}})^2(Y_1^n(p)) \\ &\quad + 4L^{n+\frac{1}{2}}(Y_1^n(p))L^{n+1}(Y_2^n(p)) + L^{n+1}(Y_2^n(p))L^n(X_{RK2}^n(p)) \\ &\quad + 4L^{n+1}(Y_2^n(p))L^{n+\frac{1}{2}}(Y_1^n(p)) + (L^{n+1})^2(Y_2^n(p))] + O(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (1.141)$$

siendo $p \in \overline{\Omega}$, $0 \leq n \leq N-1$ y $O(\Delta t^3)$ independiente de p . Por otra parte, existe una constante C que depende de \mathbf{v} tal que

$$\|(F_i^n)^{-1}\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} \leq e^{T(\|L\|_{0,\infty,T^\delta} + C\Delta t)}, \quad (1.142)$$

para $0 \leq n \leq N$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar se observa que podemos escribir $F_i^{n+1}(p)$, para $i = E, RK, RK2$, como

$$F_i^{n+1}(p) = M_i^n(p) F_i^n(p), \quad (1.143)$$

siendo

$$M_E^n(p) = I + \Delta t L^n(X_E^n(p)), \quad (1.144)$$

$$M_{RK}^n(p) = I + \Delta t L^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) \left(I + \frac{\Delta t}{2} L^n(X_{RK}^n(p)) \right), \quad (1.145)$$

$$\begin{aligned} M_{RK2}^n(p) &= I + \frac{\Delta t}{6} \{ L^n(X_{RK2}^n(p)) \\ &\quad + 4L^{n+\frac{1}{2}}(Y_1^n(p))G_1^n(p) + L^{n+1}(Y_2^n(p))G_2^n(p) \}. \end{aligned} \quad (1.146)$$

Para demostrar que $F_i^{n+1}(p)$ es invertible se procede por inducción. Puesto que $F_i^0(p) = I$, será suficiente comprobar que $M_i^n(p)$ es invertible para $0 \leq n \leq N-1$. En primer lugar se verifica

$$\|I - M_i^n\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} < 1 \quad \text{para } i = E, RK, RK2. \quad (1.147)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\|I - M_E^n\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} &= \Delta t \|L^n \circ X_E^n\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} \leq \Delta t c < 1, \\
\|I - M_{RK}^n\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} &= \Delta t \left\| L^{n+\frac{1}{2}} \circ Y^n \left(I + \frac{\Delta t}{2} L^n \circ X_{RK}^n \right) \right\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} \\
&\leq \Delta t \|L^{n+\frac{1}{2}} \circ Y^n\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} \left\| I + \frac{\Delta t}{2} L^n \circ X_{RK}^n \right\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} \leq c \Delta t \left(1 + \frac{\Delta t}{2} c \right) < 1 \\
\|I - M_{RK2}^n(p)\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} &= \frac{\Delta t}{6} \|L^n \circ X_{RK2}^n + 4L^{n+\frac{1}{2}} \circ Y_1^n G_1^n + L^{n+1} \circ Y_2^n G_2^n\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} \\
&\leq \frac{\Delta t}{6} (\|L^n \circ X_{RK2}^n\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} + 4\|L^{n+\frac{1}{2}} \circ Y_1^n\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} \|G_1^n\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} + \|L^{n+1} \circ Y_2^n\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} \|G_2^n\|_{0,\infty,\overline{\Omega}}) \\
&\leq \frac{\Delta t}{6} \left\{ c + 4c \left(1 + \frac{\Delta t}{2} c \right) + c \left(1 + c \Delta t \left(1 + \Delta t c \left(1 + \frac{\Delta t}{2} c \right) \right) \right) \right\} < 1,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $c\Delta t < \frac{1}{2}$. Entonces, teniendo en cuenta (1.147), se deduce que $M_i^n(p)$ es invertible con inversa dada por la serie

$$(M_i^n)^{-1}(p) = \sum_{j=0}^{\infty} (I - M_i^n(p))^j, \text{ para } i = E, RK, RK2. \quad (1.148)$$

Por tanto, si comprobamos que $\|(F_i^{n+1})^{-1}(p)\|_2$ está acotada de manera uniforme en $p \in \overline{\Omega}$, se siguen (1.139)-(1.141). Concretamente, veamos que se verifica (1.142). En primer lugar, a partir de (1.144)-(1.146) se deduce

$$(I - M_i^n(p)) = -\Delta t \widehat{L}_i^n(p) - \Delta t^2 R_i^n(p) \quad i = E, RK, RK2, \quad (1.149)$$

donde hemos empleado la notación introducida en la demostración del lema previo. Entonces, se tiene

$$(M_i^n)^{-1}(p) = \sum_{j=0}^{\infty} (I - M_i^n(p))^j = I - \Delta t \widehat{L}_i^n(p) - \Delta t^2 R_i^n(p) + (I - M_i^n(p))^2 \sum_{j=0}^{\infty} (I - M_i^n(p))^j.$$

Por tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned}
(F_i^{n+1})^{-1}(p) &= (F_i^n)^{-1}(p) (M_i^n)^{-1}(p) = (F_i^n)^{-1}(p) \left(I - \Delta t \widehat{L}_i^n(p) + \Delta t^2 \overline{R}_i^n(p) \right) \\
&= (F_i^n)^{-1}(p) + (F_i^n)^{-1}(p) \left(-\Delta t \widehat{L}_i^n(p) + \Delta t^2 \overline{R}_i^n(p) \right),
\end{aligned}$$

siendo

$$\overline{R}_i^n(p) = -R_i^n(p) + \left(\widehat{L}_i^n(p) + \Delta t R_i^n(p) \right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} (I - M_i^n(p))^j.$$

Además,

$$\|\overline{R}_i^n\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} \leq C,$$

siendo C una constante positiva independiente de n (depende de \mathbf{v}). Entonces, podemos proceder de forma análoga a la demostración del lema previo obteniendo (1.142). \square

Corolario 1.5.3. *Asumiendo la Hipótesis 1.1 y además $\Delta t < \eta$, los determinantes de los tensores F_i^{n+1} verifican*

$$\begin{aligned} \det F_E^{n+1}(p) &= \det F_E^n(p) + \Delta t \det F_E^n(p) \operatorname{div} \mathbf{v}^n(X_E^n(p)) + \frac{\Delta t^2}{2} \det F_E^n(p) (\operatorname{div} \mathbf{v}^n(X_E^n(p)))^2 \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{2} \det F_E^n(p) \operatorname{tr} ((L^n)^2(X_E^n(p))) + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (1.150)$$

$$\begin{aligned} \det F_{RK}^{n+1}(p) &= \det F_{RK}^n(p) + \Delta t \det F_{RK}^n(p) \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \det F_{RK}^n(p) \operatorname{tr} \left(L^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) L^n(X_{RK}^n(p)) \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \det F_{RK}^n(p) (\operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)))^2 \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{2} \det F_{RK}^n(p) \operatorname{tr} \left(\left(L^{n+\frac{1}{2}} \right)^2(Y^n(p)) \right) + O(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (1.151)$$

$$\begin{aligned} \det F_{RK2}^{n+1}(p) &= \det F_{RK2}^n(p) + \frac{\Delta t}{6} \det F_{RK2}^n(p) [\operatorname{div} \mathbf{v}^n(X_{RK2}^n(p)) + 4 \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y_1^n(p)) \\ &\quad + \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+1}(Y_2^n(p)) + 2\Delta t \operatorname{tr} \left(L^{n+\frac{1}{2}}(Y_1^n(p)) L^n(X_{RK2}^n(p)) \right) \\ &\quad + \Delta t \operatorname{tr} \left(L^{n+1}(Y_2^n(p)) L^{n+1} \left(X_{RK2}^n(p) + \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y_1^n(p)) \right) \right)] \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{72} \det F_{RK2}^n(p) \left(\operatorname{div} \mathbf{v}^n(X_{RK2}^n(p)) + 4 \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y_1^n(p)) + \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+1}(Y_2^n(p)) \right)^2 \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{72} \det F_{RK2}^n(p) \{ \operatorname{tr} ((L^n)^2(X_{RK2}^n(p))) + 4 \operatorname{tr} \left(L^n(X_{RK2}^n(p)) L^{n+\frac{1}{2}}(Y_1^n(p)) \right) \\ &\quad + 2 \operatorname{tr} \left(L^n(X_{RK2}^n(p)) L^{n+1}(Y_2^n(p)) \right) + 8 \operatorname{tr} \left((L^{n+\frac{1}{2}})^2(Y_1^n(p)) \right) \\ &\quad + 8 \operatorname{tr} \left(L^{n+\frac{1}{2}}(Y_1^n(p)) L^{n+1}(Y_2^n(p)) \right) + \operatorname{tr} ((L^{n+1})^2(Y_2^n(p))) \} + O(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (1.152)$$

siendo $p \in \overline{\Omega}$, $0 \leq n \leq N-1$ y $O(\Delta t^3)$ independiente de p . Además existen dos constantes K y G dependientes de \mathbf{v} , y la segunda también de T , tales que

$$\begin{aligned} \|\det F_i^n\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} &\leq e^{T(\|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\infty,T^\delta} + G\Delta t)}, \\ \det F_i^n(p) &> 0 \quad \text{si } \Delta t < K, \end{aligned} \quad (1.153)$$

para $0 \leq n \leq N$ e $i = E, RK, RK2$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, empleando la notación del Lema previo, se verifica

$$F_i^{n+1}(p) = M_i^n(p) F_i^n(p) \quad i = E, RK, RK2. \quad (1.154)$$

Aplicando determinantes y teniendo en cuenta que se verifican (1.96), (1.97) y (1.98), se deduce fácilmente³ (1.153). Por último, desarrollando las expresiones (1.97) y (1.98) hasta orden $O(\Delta t^3)$ y teniendo en cuenta que $\det F_i^n(p)$, $i = E, RK, RK2$, está acotado de manera uniforme en $\overline{\Omega}$ por una constante independiente de n , se obtienen (1.150)-(1.152). \square

³La cota superior se obtiene de forma análoga a la demostración de (1.134).

Corolario 1.5.4. *Suponiendo que se cumplen las hipótesis del Lema 1.5.3, los determinantes de los tensores $(F_i^{n+1})^{-1}$ verifican*

$$\det(F_E^{n+1})^{-1}(p) = \det(F_E^n)^{-1}(p) - \Delta t \det(F_E^n)^{-1}(p) \operatorname{div} \mathbf{v}^n(X_E^n(p)) + O(\Delta t^2), \quad (1.155)$$

$$\det(F_{RK}^{n+1})^{-1}(p) = \det(F_{RK}^n)^{-1}(p) - \Delta t \det(F_{RK}^n)^{-1}(p) \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) + O(\Delta t^2), \quad (1.156)$$

$$\det(F_{RK2}^{n+1})^{-1}(p) = \det(F_{RK2}^n)^{-1}(p) - \frac{\Delta t}{6} \det(F_{RK2}^n)^{-1}(p) [\operatorname{div} \mathbf{v}^n(X_{RK2}^n(p)) + 4 \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y_1^n(p)) + \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+1}(Y_2^n(p))] + O(\Delta t^2), \quad (1.157)$$

siendo $p \in \overline{\Omega}$, $0 \leq n \leq N-1$ y $O(\Delta t^2)$ independiente de p . Además, existe una constante G dependiente de \mathbf{v} tal que

$$\|\det(F_i^n)^{-1}\|_{0,\infty,\overline{\Omega}} \leq e^{T(\|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\infty,\mathcal{T}^\delta} + G\Delta t)}, \quad (1.158)$$

para $0 \leq n \leq N$ e $i = E, RK, RK2$.

Lema 1.5.4. *Supongamos que se cumple la Hipótesis 1.1 y además $\Delta t < \min\{\eta, \frac{1}{2c}, K\}$, siendo K la constante del Corolario 1.5.3. Entonces existen cuatro constantes positivas dependientes de c y T , $\tilde{c}_j > 0$, $\tilde{C}_k > 0$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2$, tales que*

$$\tilde{c}_1 \leq \det F_i^n(p) \leq \tilde{C}_1, \quad \tilde{c}_2 \leq |(F_i^n)^{-T}(p)\mathbf{m}| \leq \tilde{C}_2, \quad (1.159)$$

siendo $p \in \overline{\Omega}$, $\mathbf{m} \in \mathcal{V}$ con $|\mathbf{m}| = 1$, $n = 0, \dots, N$ e $i = E, RK, RK2$.

DEMOSTRACIÓN Las cotas inferior y superior para $\det F_i^n(p)$ se obtienen de (1.153) y (1.158).

A partir de las desigualdades (1.134) y (1.142) se deduce que las normas de las traspuestas de las matrices Jacobianas y sus inversas están acotadas superiormente y de manera uniforme en $\overline{\Omega}$ por constantes que dependen únicamente de c y T . Entonces, se tiene trivialmente una cota superior para $|(F_i^n)^{-T}(p)\mathbf{m}|$ y también se deduce una cota inferior para $|(F_i^n)^{-T}(p)\mathbf{m}|$, teniendo en cuenta que se verifica

$$1 = |\mathbf{m}| = |(F_i^n)^T(p)(F_i^n)^{-T}(p)\mathbf{m}|,$$

donde $\mathbf{m} \in \mathcal{V}$ con $|\mathbf{m}| = 1$. □

Lema 1.5.5. *Supongamos que se cumple la Hipótesis 1.1; si además $\Delta t < \{\eta, \frac{1}{2c}\}$, entonces la aplicación X_i^n es inyectiva para todo $n \in \{0, \dots, N\}$ e $i = E, RK, RK2$.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar se observa que podemos escribir X_i^{n+1} para $i = E, RK, RK2$ como

$$X_i^{n+1}(p) = b_i^n(X_i^n(p)),$$

para $p \in \overline{\Omega}$ y $0 \leq n \leq N-1$, siendo

$$\begin{aligned} b_E^n(x) &= x + \Delta t \mathbf{v}^n(x) \quad x \in X_E^n(\overline{\Omega}), \\ b_{RK}^n(x) &= x + \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(x + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(x)) \quad x \in X_{RK}^n(\overline{\Omega}), \\ b_{RK2}^n(x) &= x + \frac{\Delta t}{6} \left[\mathbf{v}^n(x) + 4 \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(x + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(x)) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{v}^{n+1} \left(x + \Delta t \mathbf{v}^{n+1} \left(x + \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(x + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(x)) \right) \right) \right] \quad x \in X_{RK2}^n(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

A partir del Lema 1.5.1 se deduce que estas aplicaciones están bien definidas. Además, para cada $0 \leq n \leq N-1$ se tiene

$$X_i^{n+1}(p) = (b_i^n \circ b_i^{n-1} \cdots \circ b_i^1 \circ b_i^0 \circ X_i^0)(p) \quad i = E, RK, RK2,$$

siendo $p \in \overline{\Omega}$. Nótese que $X_i^0(p) = p$ para todo $p \in \overline{\Omega}$, y por lo tanto es una aplicación inyectiva. Entonces, teniendo en cuenta que la composición de aplicaciones inyectivas es inyectiva, si comprobamos que las aplicaciones b_i^n son inyectivas en $X_i^n(\overline{\Omega})$ para todo $i \in E, RK, RK2$ y $n \in \{0, \dots, N-1\}$ se deduce el resultado.

- Aproximación de Euler. Sea $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Supongamos que $b_E^n(x_1) = b_E^n(x_2)$, para algún $x_1, x_2 \in X_E^n(\overline{\Omega})$ con $x_1 \neq x_2$. Entonces se tiene

$$x_1 - x_2 = \Delta t \mathbf{v}^n(x_2) - \Delta t \mathbf{v}^n(x_1),$$

aplicando normas y teniendo en cuenta la regularidad de \mathbf{v} se deduce la contradicción

$$|x_1 - x_2| \leq \Delta t c |x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|,$$

donde hemos utilizado que $c\Delta t < 1$.

- Aproximación de Runge-Kutta de segundo orden. Sea $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Supongamos que $b_{RK}^n(x_1) = b_{RK}^n(x_2)$, para algún $x_1, x_2 \in X_{RK}^n(\overline{\Omega})$ con $x_1 \neq x_2$ entonces se tiene

$$x_1 - x_2 = \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \left(x_2 + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(x_2) \right) - \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \left(x_1 + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(x_1) \right),$$

aplicando normas y teniendo en cuenta la regularidad de \mathbf{v} se deduce la contradicción

$$|x_1 - x_2| \leq \Delta t c \left| x_1 - x_2 + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(x_1) - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(x_2) \right| \leq \Delta t c \left(1 + \frac{\Delta t}{2} c \right) |x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|,$$

donde hemos utilizado que $c\Delta t < 1/2$.

- Aproximación de Runge-Kutta de tercer orden. Procediendo de forma análoga a los casos anteriores se deduce que b_{RK2}^n es inyectiva en $X_{RK2}^n(\overline{\Omega})$.

□

Corolario 1.5.5. *Supongamos que se verifican las hipótesis del Lema previo y además $\Delta t < K$, siendo K la constante que aparece en el Corolario 1.5.3. Entonces, $X_i^n(\Omega)$ es abierto y conexo para todo $0 \leq n \leq N$ e $i \in \{E, RK, RK2\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el lema previo se tiene que X_i^n es inyectiva para todo $0 \leq n \leq N$ e $i \in \{E, RK, RK2\}$. Entonces, aplicando el Teorema 13.3 de [6] y teniendo en cuenta la continuidad de X_i^n se deduce el resultado. □

Hipótesis 1.2. *El movimiento $X_e \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega} \times [0, T])$, y satisface*

$$\overline{\Omega}_t = \overline{\Omega} \quad X_e(p, t) = p \quad \forall p \in \Gamma \quad \forall t \in [0, T].$$

Observación 1.5.1. *Nótese que si se verifica la Hipótesis 1.2, entonces*

$$\Gamma_t = \Gamma \quad \mathbf{v} \in \mathbf{C}^1(\mathcal{T}) \quad \mathbf{v}(x, t) = 0 \quad \forall x \in \Gamma \quad \forall t \in [0, T].$$

Si se verifica la Hipótesis 1.2, el Lema 1.5.1 se puede mejorar:

Lema 1.5.6. *Supongamos que se verifica la Hipótesis 1.2 y $\Delta t < \min\{K, \frac{1}{2c_0}\}$, siendo K la constante que aparece en el Corolario 1.5.3⁴ y $c_0 = \max_{\{(x,t): t \in [0, T], x \in \bar{\Omega}\}} \|\text{grad } \mathbf{v}(x, t)\|_2$. Entonces, X_i^n está definida, es inyectiva en $\bar{\Omega}$ y $X_i^n(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$ para $n \in \{0, \dots, N\}$ e $i \in \{E, RK, RK2\}$.*

DEMOSTRACIÓN. El resultado se comprueba por inducción. Para $n = 0$ trivialmente X_i^0 está definida y es inyectiva en $\bar{\Omega}$, y $X_i^0(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$. Sea $n \in \{0, \dots, N - 1\}$. Supongamos que X_i^n verifica lo anterior. Con objeto de probar que el resultado es cierto para X_i^{n+1} , procederemos de la siguiente manera:

1. En primer lugar comprobaremos que X_i^{n+1} está definida en $\bar{\Omega}$. Como veremos, esta propiedad se verifica facilmente gracias a que $\Delta t < \frac{1}{2c_0}$.
2. A continuación veremos que X_i^{n+1} es inyectiva en $\bar{\Omega}$. La demostración es análoga a la del Lema 1.5.5 teniendo en cuenta que, en este caso, $X_i^n(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$.
3. Por último, utilizando la Hipótesis 1.2, la hipótesis de inducción, que $\Delta t < K$ y las propiedades que verifica el grado topológico se comprueba que $X_i^{n+1}(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$.

Para probar 1., introducimos las siguientes aplicaciones auxiliares

$$\begin{aligned} \tilde{b}_E^n(z, s) &= z + s\Delta t \mathbf{v}^n(z), \\ \tilde{b}_{RK}^n(z, s) &= z + s\Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \left(z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) \right), \\ \tilde{b}_{RK2}^n(z, s) &= z + s\frac{\Delta t}{6} \left[\mathbf{v}^n(z) + 4\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \left(z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{v}^{n+1} \left(z + \Delta t \mathbf{v}^{n+1} \left(z + \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \left(z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) \right) \right) \right) \right], \end{aligned}$$

para todo $(z, s) \in \bar{\Omega} \times [0, 1]$. Comprobemos que estas aplicaciones están bien definidas. En primer lugar nótese que esto ocurre para $(z, s) \in \Gamma \times [0, 1]$; de hecho $\tilde{b}_i^n(z, s) = z \quad \forall (z, s) \in \Gamma \times [0, 1]$, $i = E, RK, RK2$. Sea $(z, s) \in \Omega \times [0, 1]$. Trivialmente $\tilde{b}_E^n(z, s)$ está definido; veamos que también $\tilde{b}_{RK}^n(z, s)$ y $\tilde{b}_{RK2}^n(z, s)$ están definidos.

- Aproximación Runge-Kutta orden dos. En primer lugar, se tiene que $\text{dist}(z, \Gamma) = |z - \bar{z}| > 0$ para algún $\bar{z} \in \Gamma$. Además, utilizando la regularidad de la velocidad $\mathbf{v}(\cdot, t)$ y la Observación 1.5.1, se deduce

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}^n(z)| &= |\mathbf{v}^n(z) - \mathbf{v}^n(\bar{z})| \leq c_0 |z - \bar{z}| \\ &= c_0 \text{dist}(z, \Gamma). \end{aligned}$$

⁴Nótese que es este caso la constante K depende de la norma de la velocidad \mathbf{v} en la trayectoria del movimiento, no en la trayectoria aumentada.

Entonces, si $c_0\Delta t < 2$, se tiene

$$\begin{aligned} \left| z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) - z \right| &= \frac{\Delta t}{2} |\mathbf{v}^n(z)| \leq c_0 \frac{\Delta t}{2} \text{dist}(z, \Gamma) \\ &< \text{dist}(z, \Gamma), \end{aligned} \quad (1.160)$$

de lo que se deduce que $z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) \in \Omega$ y por lo tanto $\tilde{b}_{RK}^n(z, s)$ está definido.

- Aproximación Runge-Kutta orden tres. En primer lugar, se tiene que $\text{dist}(z, \Gamma) = |z - \bar{z}| > 0$ para algún $\bar{z} \in \Gamma$. Además, utilizando la regularidad de la velocidad $\mathbf{v}(\cdot, t)$, la Observación 1.5.1, y la desigualdad (1.160), y suponiendo que $c_0\Delta t < 1/2$, se deduce

$$\begin{aligned} &\left| \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \left(z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) \right) \right| = \left| \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \left(z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) \right) - \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(\bar{z}) \right| \\ &\leq c_0 \left| z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) - \bar{z} \right| \leq c_0 \left(\left| z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) - z \right| + |z - \bar{z}| \right) \\ &< c_0 \frac{5}{4} |z - \bar{z}| = c_0 \frac{5}{4} \text{dist}(z, \Gamma). \end{aligned}$$

Utilizando esta desigualdad y suponiendo que $c_0\Delta t < 1/2$, se obtiene

$$\begin{aligned} &\left| \left(z + \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \left(z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) \right) \right) - z \right| = \Delta t \left| \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \left(z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) \right) \right| \\ &< c_0 \frac{5}{4} \Delta t \text{dist}(z, \Gamma) < \frac{5}{8} \text{dist}(z, \Gamma), \end{aligned}$$

por lo que $z + \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \left(z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) \right) \in \Omega$, y también

$$\begin{aligned} &\left| \mathbf{v}^{n+1} \left(z + \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \left(z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) \right) \right) \right| \\ &= \left| \mathbf{v}^{n+1} \left(z + \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \left(z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) \right) \right) - \mathbf{v}^{n+1}(\bar{z}) \right| \\ &\leq c_0 \left| \left(z + \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \left(z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) \right) \right) - \bar{z} \right| \\ &\leq c_0 \left(\left| \left(z + \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \left(z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) \right) \right) - z \right| + |z - \bar{z}| \right) \\ &< c_0 \frac{13}{8} \text{dis}(z, \Gamma), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la regularidad de la velocidad $\mathbf{v}(\cdot, t)$ y la Observación 1.5.1. Entonces, si $c_0\Delta t < 1/2$, se obtiene

$$\begin{aligned} &\left| \left(z + \Delta t \mathbf{v}^{n+1} \left(z + \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \left(z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) \right) \right) \right) - z \right| \\ &= \Delta t \left| \mathbf{v}^{n+1} \left(z + \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \left(z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) \right) \right) \right| \\ &< c_0 \frac{13}{8} \Delta t \text{dis}(z, \Gamma) < \frac{13}{16} \text{dis}(z, \Gamma). \end{aligned} \quad (1.161)$$

Por tanto

$$z + \Delta t \mathbf{v}^{n+1} \left(z + \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \left(z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) \right) \right) \in \Omega,$$

además por el apartado anterior $z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(z) \in \Omega$ así que $\tilde{b}_{RK2}^n(z, s)$ está definido.

Por otro lado se tiene

$$X_i^{n+1}(p) = \tilde{b}_i^n(X_i^n(p), 1)$$

para $p \in \overline{\Omega}$, $0 \leq n \leq N-1$ e $i \in \{E, RK, RK2\}$. Entonces, $X_i^{n+1}(p)$ está definido para todo $p \in \overline{\Omega}$ (nótese que por la hipótesis de inducción $X_i^n(\overline{\Omega}) = \overline{\Omega}$). Lo que concluye la demostración del primer apartado.

Además, por la hipótesis de inducción X_i^n es inyectiva en $\overline{\Omega}$; entonces para comprobar que X_i^{n+1} también lo es, bastará con ver que $\tilde{b}_i^n(\cdot, 1)$ es inyectiva. Para ello, se procede como en la demostración del Lema 1.5.5 cuando se comprueba que las aplicaciones b_i^n introducidas en dicha demostración son inyectivas.

Por último, tenemos que probar que $X_i^{n+1}(\overline{\Omega}) = \overline{\Omega}$. La demostración se basa fundamentalmente en las propiedades que verifica el grado topológico. En primer lugar, se observa que las aplicaciones X_i^n y X_i^{n+1} son homótopas en $\overline{\Omega}$ sin más que considerar la aplicación

$$H_i^n : \overline{\Omega} \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{E},$$

definida por

$$H_i^n(p, s) = \tilde{b}_i^n(X_i^n(p), s)$$

para $s \in [0, 1]$, $p \in \overline{\Omega}$, e $i \in \{E, RK, RK2\}$. Utilizando la regularidad de la velocidad \mathbf{v} se tiene que H_i^n es continua. Además, se verifica $H_i^n(\cdot, 0) = X_i^n$ y $H_i^n(\cdot, 1) = X_i^{n+1}$. Por otro lado como $\mathbf{v} \equiv 0$ sobre la frontera Γ es inmediato comprobar que $H_i^n(p, s) = p$ para todo $(p, s) \in \Gamma \times [0, 1]$. Por tanto $H_i^n(\Gamma, s) = \Gamma$ para todo $s \in [0, 1]$ (nótese que en particular $X_i^n(\Gamma) = X_i^{n+1}(\Gamma) = \Gamma$; de hecho $X_i^n(p) = X_i^{n+1}(p) = p$, $\forall p \in \Gamma$). Por consiguiente, aplicando la Proposición 1.2.5 con $\mathcal{A} = \Omega$ y $H = H_i^n$ se tiene

$$\text{grado}(X_i^{n+1}, \Omega, z) = \text{grado}(X_i^n, \Omega, z),$$

para todo $z \in \mathcal{E}$ y $z \notin \Gamma$. Utilizando la regularidad de la velocidad puede comprobarse por inducción que $X_i^n(p)$, $X_i^{n+1}(p) \in \mathbf{C}^1(\Omega) \cap \mathbf{C}(\overline{\Omega})$. Además, teniendo en cuenta que $X_i^n(\Gamma) = \Gamma$ y que por la hipótesis de inducción X_i^n es inyectiva en $\overline{\Omega}$ y $X_i^n(\overline{\Omega}) = \overline{\Omega}$, se deduce que $X_i^n(\Omega) = \Omega$. Entonces, aplicando el Lema 1.2.5 con $\mathcal{A} = \Omega$ y $b = X_i^n$, y teniendo en cuenta que se verifica la segunda desigualdad de (1.153), se deduce que

$$\text{grado}(X_i^n, \Omega, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \Omega, \\ 0 & \text{si } z \notin \overline{\Omega}, \end{cases}$$

donde hemos utilizado que X_i^n es inyectiva en Ω , $X_i^n(\Gamma) = \Gamma$ y $X_i^n(\Omega) = \Omega$. Por tanto,

$$\text{grado}(X_i^{n+1}, \Omega, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \Omega, \\ 0 & \text{si } z \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Entonces, aplicando el Lema 1.2.5 con $\mathcal{A} = \Omega$ y $b = X_i^{n+1}$ y teniendo en cuenta que se verifica la segunda desigualdad de (1.153), se deduce que $\Omega \subset X_i^{n+1}(\Omega) \subset \overline{\Omega}$. Además, como $X_i^{n+1}(\Gamma) = \Gamma$ se tiene que $X_i^{n+1}(\overline{\Omega}) = \overline{\Omega}$. \square

Observación 1.5.2. Los Lemas 1.5.2, 1.5.3 y 1.5.4 y los Corolarios 1.5.3 y 1.5.4 son válidos para un movimiento cualquiera. Además, en el caso en que se verifique la Hipótesis 1.2 dichos resultados se cumplen asumiendo las hipótesis del Lema 1.5.6.

Lema 1.5.7. Supongamos que se cumplen las hipótesis del Lema 1.5.6. Entonces existe una constante positiva G tal que, para todo $\psi \in L^2(\Omega)$ se verifica

$$\|\psi \circ X_i^n\|_{0,2,\Omega}^2 \leq e^{T(\|\text{div } \mathbf{v}\|_{0,\infty,\overline{\Omega} \times [0,T]} + G\Delta t)} \|\psi\|_{0,2,\Omega}^2, \quad (1.162)$$

para $n = 0, \dots, N$ e $i = E, RK, RK2$.

DEMOSTRACIÓN. Usando el Lema 1.5.6 y el cambio de variable $x = X_i^n(p)$, se deduce

$$\|\psi \circ X_i^n\|_{0,2,\Omega}^2 = \int_{\Omega} (\psi(X_i^n(p)))^2 dp = \int_{\Omega} \psi^2(x) \det(F_i^n)^{-1}(x) dx, \quad (1.163)$$

para $i = E, RK, RK2$. Finalmente, la estimación (1.162) se obtiene de (1.158), observando que en este caso $\mathbf{v} \equiv 0$ sobre Γ por lo que las imágenes de las funciones X_i^n , Y^n , Y_1^n , Y_2^n están contenidas en $\bar{\Omega}$. \square

1.5.3. Problema semidiscretizado en tiempo

En la práctica las curvas características no se conocen exactamente, por lo que en la ecuación (1.67) reemplazaremos X_e y sus gradientes por aproximaciones que proporcionen órdenes adecuados. Para ello, como en general las aproximaciones no se aplican en $\bar{\Omega}_{t_n}$ (ver Lema 1.5.1), será necesario que las funciones ρ , A , f y g se puedan extender con suavidad a un conjunto más amplio, concretamente:

Hipótesis 1.3. La función ρ está definida en \mathcal{O}^δ y pertenece a $W^{1,\infty}(\mathcal{O}^\delta)$, siendo \mathcal{O}^δ el conjunto que se introduce en (1.120). Además, se verifica

$$0 < \gamma \leq \rho(x) \quad \text{c.p.d. } x \in \mathcal{O}^\delta. \quad (1.164)$$

En adelante, denotaremos por $\rho_{1,\infty} = \|\rho\|_{1,\infty,\mathcal{O}^\delta}$.

Hipótesis 1.4. El coeficiente (tensorial) de difusión, A , está definido en \mathcal{O}^δ y pertenece a $\mathbb{W}^{1,\infty}(\mathcal{O}^\delta)$. Además la matriz A es simétrica de dimensión $d \times d$ y verifica

$$A = \begin{pmatrix} A_{n_1} & \Theta \\ \Theta & \Theta \end{pmatrix}, \quad (1.165)$$

donde A_{n_1} es una matriz simétrica y definida positiva de dimensión $n_1 \times n_1$ ($n_1 \geq 1$) y Θ una matriz apropiada de ceros. Además, existe una constante positiva, Λ , que es una cota inferior uniforme de los autovalores de A_{n_1} .

Nota 1.5.4. En numerosas aplicaciones a las finanzas la matriz A presenta la forma dada en (1.165) (ver [68]). Por ese motivo hemos introducido esta expresión general para la matriz de difusión.

Hipótesis 1.5. La función f está definida en \mathcal{T}^δ y es continua respecto de la variable temporal aplicada en el espacio L^2 de los dominios aumentados, dicho espacio lo denotaremos por $C^0(L^2(\Omega_t^\delta))$, siendo Ω_t^δ el conjunto definido en (1.119).

Hipótesis 1.6. La función g está definida en $\mathcal{T}_{\Gamma R}^\delta$ y es continua respecto de la variable temporal aplicada en el espacio H^1 de las fronteras Robin aumentadas, dicho espacio lo denotaremos por $C^0(H^1(G_t^\delta))$, siendo G_t^δ el conjunto definido en (1.122). Además la constante α que aparece en la condición Robin de (1.8) es mayor que 0.

Entonces, asumiendo estas hipótesis y las del Lema 1.5.3 tiene sentido proponer la siguiente ecuación que resulta de reemplazar en (1.67) las curvas características y los gradientes exactos del movimiento por

sus aproximaciones⁵

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\theta \rho(X_i^{n+1}(p)) \det F_i^{n+1}(p) + (1-\theta) \rho(X_i^n(p)) \det F_i^n(p)) \frac{\phi_{m,\Delta t,i}^{n+1}(p) - \phi_{m,\Delta t,i}^n(p)}{\Delta t} \psi(p) dp \\
& + \theta^2 \int_{\Omega} (F_i^{n+1})^{-1}(p) A(X_i^{n+1}(p)) (F_i^{n+1})^{-T}(p) \nabla \phi_{m,\Delta t,i}^{n+1}(p) \cdot \nabla \psi(p) \det F_i^{n+1}(p) dp \\
& + (1-\theta) \theta \int_{\Omega} (F_i^n)^{-1}(p) A(X_i^n(p)) (F_i^n)^{-T}(p) \nabla \phi_{m,\Delta t,i}^{n+1}(p) \cdot \nabla \psi(p) \det F_i^n(p) dp \\
& + (1-\theta) \theta \int_{\Omega} (F_i^{n+1})^{-1}(p) A(X_i^{n+1}(p)) (F_i^{n+1})^{-T}(p) \nabla \phi_{m,\Delta t,i}^n(p) \cdot \nabla \psi(p) \det F_i^{n+1}(p) dp \\
& + (1-\theta)^2 \int_{\Omega} (F_i^n)^{-1}(p) A(X_i^n(p)) (F_i^n)^{-T}(p) \nabla \phi_{m,\Delta t,i}^n(p) \cdot \nabla \psi(p) \det F_i^n(p) dp \\
& + \theta^2 \alpha \int_{\Gamma^R} |(F_i^{n+1})^{-T}(p) \mathbf{m}(p)| \det F_i^{n+1}(p) \phi_{m,\Delta t,i}^{n+1}(p) \psi(p) dA_p \\
& + (1-\theta) \theta \alpha \int_{\Gamma^R} |(F_i^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p)| \det F_i^n(p) \phi_{m,\Delta t,i}^{n+1}(p) \psi(p) dA_p \\
& + (1-\theta) \theta \alpha \int_{\Gamma^R} |(F_i^{n+1})^{-T}(p) \mathbf{m}(p)| \det F_i^{n+1}(p) \phi_{m,\Delta t,i}^n(p) \psi(p) dA_p \\
& + (1-\theta)^2 \alpha \int_{\Gamma^R} |(F_i^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p)| \det F_i^n(p) \phi_{m,\Delta t,i}^n(p) \psi(p) dA_p \\
& = \int_{\Omega} (\theta \det F_i^{n+1}(p) f^{n+1}(X_i^{n+1}(p)) + (1-\theta) \det F_i^n(p) f^n(X_i^n(p))) \psi(p) dp \\
& + \theta \int_{\Gamma^R} |(F_i^{n+1})^{-T}(p) \mathbf{m}(p)| g^{n+1}(X_i^{n+1}(p)) \det F_i^{n+1}(p) \psi(p) dA_p \\
& + (1-\theta) \int_{\Gamma^R} |(F_i^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p)| g^n(X_i^n(p)) \det F_i^n(p) \psi(p) dA_p, \quad \text{para } i \in \{E, RK, RK2\}.
\end{aligned} \tag{1.166}$$

Para $\phi \in C^0(H^1(\Omega))$, definimos

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\Delta t}^{n,\theta,i}[\phi] : &= (\theta \rho \circ X_i^{n+1} \det F_i^{n+1} + (1-\theta) \rho \circ X_i^n \det F_i^n) \\
& (\phi^{n+1} - \phi^n).
\end{aligned} \tag{1.167}$$

También, introducimos para $\phi \in C^0(H^1(\Omega))$ las funciones $\mathcal{M}_{\Delta t}^{n,\theta,i}[\phi] \in H^1(\Omega)'$ y $\mathcal{N}_{\Delta t}^{n,\theta,i} \in (H^1(\Omega))'$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{M}_{\Delta t}^{n,\theta,i}[\phi], \psi \rangle := & \theta^2 \int_{\Omega} (F_i^{n+1})^{-1} A \circ X_i^{n+1} (F_i^{n+1})^{-T} \nabla \phi^{n+1} \det F_i^{n+1} \cdot \nabla \psi dp \\
& + (1-\theta) \theta \int_{\Omega} (F_i^n)^{-1} A \circ X_i^n (F_i^n)^{-T} \nabla \phi^{n+1} \det F_i^n \cdot \nabla \psi dp \\
& + (1-\theta) \theta \int_{\Omega} (F_i^{n+1})^{-1} A \circ X_i^{n+1} (F_i^{n+1})^{-T} \nabla \phi^{n+1} \det F_i^{n+1} \cdot \nabla \psi dp \\
& + (1-\theta)^2 \int_{\Omega} (F_i^n)^{-1} A \circ X_i^n (F_i^n)^{-T} \nabla \phi^n \det F_i^n \cdot \nabla \psi dp \\
& + \alpha \theta^2 \int_{\Gamma^R} |(F_i^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \phi^{n+1} \det F_i^{n+1} \psi dp \\
& + \alpha (1-\theta) \theta \int_{\Gamma^R} |(F_i^n)^{-T} \mathbf{m}| \phi^{n+1} \det F_i^n \psi dp \\
& + \alpha (1-\theta) \theta \int_{\Gamma^R} |(F_i^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \phi^n \det F_i^{n+1} \psi dp \\
& + \alpha (1-\theta)^2 \int_{\Gamma^R} |(F_i^n)^{-T} \mathbf{m}| \phi^n \det F_i^n \psi dp,
\end{aligned} \tag{1.168}$$

⁵Recordemos que aplicando el Lema 1.5.1 se deduce que $X_i^n(\bar{\Omega}) \subset \Omega_{t_n}^\delta$, para $n \in \{0, \dots, N\}$, $i \in \{E, RK, RK2\}$.

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{N}_{\Delta t}^{n,\theta,i}, \psi \rangle := & \int_{\Omega} (\theta \det F_i^{n+1} f^{n+1} \circ X_i^{n+1} + (1 - \theta) \det F_i^n f^n \circ X_i^n) \psi dp \\
& + \theta \int_{\Gamma^R} |(F_i^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| g^{n+1} \circ X_i^{n+1} \det F_i^{n+1} \psi dp \\
& + (1 - \theta) \int_{\Gamma^R} |(F_i^n)^{-T} \mathbf{m}| g^n \circ X_i^n \det F_i^n \psi dp, \quad .
\end{aligned} \tag{1.169}$$

para todo $\psi \in H^1(\Omega)$.

En adelante, las sucesiones funcionales, $\{\psi^n\}_{n=0}^N$, se denotarán de forma abreviada por $\widehat{\psi} := \{\psi^n\}_{n=0}^N$. Análogamente, si ψ es una aplicación definida en $[0, T]$ y con valores en un cierto espacio funcional, $\widehat{\psi}$ denotará la sucesión funcional $\widehat{\psi} := \{\psi(t_n)\}_{n=0}^N$. Además, el símbolo $\widehat{}$ en la mitad de una expresión larga se considera que la recubre toda.

Observación 1.5.3. En la definición de $\mathcal{M}_{\Delta t}^{n,\theta,i}$ y $\mathcal{D}_{\Delta t}^{n,\theta,i}$ intervienen únicamente los valores de ϕ en los pasos de tiempo $\{t_n\}_{n=0}^N$, por lo que estos operadores se pueden definir para una sucesión de funciones $\widehat{\phi} = \{\phi^n\}_{n=0}^N \in [H^1(\Omega)]^{N+1}$.

Considerando $\theta = 1$ y la fórmula de primer orden correspondiente al método de Euler para las aproximaciones de las características y sus gradientes, resulta un método Lagrangiano implícito de primer orden. En este trabajo analizaremos el problema que se obtiene tomando $\theta = 1/2$ y aproximando las características exactas por la fórmula de Runge-Kutta de orden dos introducida en el apartado anterior. Antes de escribir los problemas semidiscretizados de forma más compacta, recordamos que estamos considerando un problema con condición de Dirichlet no homogénea (ver (1.8)). En adelante asumimos $\phi_D \equiv 0$, sin pérdida de generalidad, puesto que siempre es posible hacer una traslación utilizando un levantamiento de ϕ_D . Sea $\mathcal{W} \subset H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ un subespacio cerrado. Entonces, consideramos los siguientes problemas:

- *Método implícito de primer orden:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } \phi_{m,\Delta t}^0 \in H^1(\Omega), \text{ encontrar } \widehat{\phi_{m,\Delta t}} = \{\phi_{m,\Delta t}^n\}_{n=1}^N \in [\mathcal{W}]^N \text{ tal que} \\ \frac{1}{\Delta t} \langle \mathcal{D}_{\Delta t}^{n,1,E}[\widehat{\phi_{m,\Delta t}}], \psi \rangle_{0,\Omega} + \langle \mathcal{M}_{\Delta t}^{n,1,E}[\widehat{\phi_{m,\Delta t}}], \psi \rangle = \langle \mathcal{N}_{\Delta t}^{n,1,E}, \psi \rangle \\ \text{para todo } \psi \in \mathcal{W} \text{ y } n = 0, \dots, N-1. \end{array} \right. \tag{1.170}$$

- *Método de Crank-Nicholson Lagrangiano:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } \phi_{m,\Delta t}^0 \in H^1(\Omega), \text{ encontrar } \widehat{\phi_{m,\Delta t}} = \{\phi_{m,\Delta t}^n\}_{n=1}^N \in [\mathcal{W}]^N \text{ tal que} \\ \frac{1}{\Delta t} \langle \mathcal{D}_{\Delta t}^{n,\frac{1}{2},RK}[\widehat{\phi_{m,\Delta t}}], \psi \rangle_{0,\Omega} + \langle \mathcal{M}_{\Delta t}^{n,\frac{1}{2},RK}[\widehat{\phi_{m,\Delta t}}], \psi \rangle = \langle \mathcal{N}_{\Delta t}^{n,\frac{1}{2},RK}, \psi \rangle \\ \text{para todo } \psi \in \mathcal{W} \text{ y } n = 0, \dots, N-1. \end{array} \right. \tag{1.171}$$

1.5.4. Existencia y unicidad de solución del problema semidiscretizado

El objetivo de este apartado es obtener un resultado de existencia y unicidad de solución del problema (1.171).

En primer lugar, conviene recordar las siguientes definiciones

Definición 1.5.1. Sea H un espacio de Hilbert. Se dice que una forma bilineal $a(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ es

- *continua* si existe una constante D tal que

$$|a(u, v)| \leq D|u||v| \quad \forall u, v \in H,$$

- **coerciva** si existe una constante $C > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq C|v|^2 \quad \forall v \in H.$$

Teorema 1.5.1. *Supongamos que se cumplen las Hipótesis 1.1, 1.3, 1.4, 1.5 y 1.6 siendo $n_1 = d$; y además $\Delta t < \min\{\eta, \frac{1}{2c}, K\}$, donde K es la constante del Corolario 1.5.3. Entonces, el problema (1.171) tiene una única solución $\widehat{\phi_{m,\Delta t}} = \{\phi_{m,\Delta t}^n\}_{n=1}^N \in [\mathcal{W}]^N$.*

DEMOSTRACIÓN. Introducimos las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} a^n(\varphi, \psi) &:= \frac{1}{2\Delta t} \int_{\Omega} (\rho(X_{RK}^{n+1}(p)) \det F_{RK}^{n+1}(p) + \rho(X_{RK}^n(p)) \det F_{RK}^n(p)) \varphi(p) \psi(p) dp \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\Omega} (F_{RK}^{n+1})^{-1}(p) A(X_{RK}^{n+1}(p)) (F_{RK}^{n+1})^{-T}(p) \nabla \varphi(p) \cdot \nabla \psi(p) \det F_{RK}^{n+1}(p) dp \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\Omega} (F_{RK}^n)^{-1}(p) A(X_{RK}^n(p)) (F_{RK}^n)^{-T}(p) \nabla \varphi(p) \cdot \nabla \psi(p) \det F_{RK}^n(p) dp \\ &\quad + \frac{\alpha}{4} \int_{\Gamma^R} |(F_{RK}^{n+1})^{-T}(p) \mathbf{m}(p)| \det F_{RK}^{n+1}(p) \varphi(p) \psi(p) dA_p \\ &\quad + \frac{\alpha}{4} \int_{\Gamma^R} |(F_{RK}^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p)| \det F_{RK}^n(p) \varphi(p) \psi(p) dA_p \quad \forall \varphi, \psi \in H^1(\Omega) \\ L^n(\psi) &:= \frac{1}{2\Delta t} \int_{\Omega} (\rho(X_{RK}^{n+1}(p)) \det F_{RK}^{n+1}(p) + \rho(X_{RK}^n(p)) \det F_{RK}^n(p)) \vartheta(p) \psi(p) dp \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\Omega} (F_{RK}^{n+1})^{-1}(p) A(X_{RK}^{n+1}(p)) (F_{RK}^{n+1})^{-T}(p) \nabla \vartheta(p) \cdot \nabla \psi(p) \det F_{RK}^{n+1}(p) dp \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\Omega} (F_{RK}^n)^{-1}(p) A(X_{RK}^n(p)) (F_{RK}^n)^{-T}(p) \nabla \vartheta(p) \cdot \nabla \psi(p) \det F_{RK}^n(p) dp \\ &\quad + \frac{\alpha}{4} \int_{\Gamma^R} |(F_{RK}^{n+1})^{-T}(p) \mathbf{m}(p)| \det F_{RK}^{n+1}(p) \vartheta(p) \psi(p) dA_p \\ &\quad + \frac{\alpha}{4} \int_{\Gamma^R} |(F_{RK}^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p)| \det F_{RK}^n(p) \vartheta(p) \psi(p) dA_p, \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\det F_{RK}^{n+1}(p) f^{n+1}(X_{RK}^{n+1}(p)) + \det F_{RK}^n(p) f^n(X_{RK}^n(p))) \psi(p) dp \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^R} |(F_{RK}^{n+1})^{-T}(p) \mathbf{m}(p)| g^{n+1}(X_{RK}^{n+1}(p)) \det F_{RK}^{n+1}(p) \psi(p) dp \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^R} |(F_{RK}^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p)| g^n(X_{RK}^n(p)) \det F_{RK}^n(p) \psi(p) dp \quad \forall \psi \in H^1(\Omega), \end{aligned}$$

siendo $\vartheta \in H^1(\Omega)$ y $0 \leq n \leq N-1$. Entonces, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, utilizando la primera desigualdad de (1.153) y (1.142), y teniendo en cuenta que por la continuidad del operador *traza* se tiene

$$\|\xi\|_{0,2,\Gamma^R} \leq c_{\Omega} \|\xi\|_{1,2,\Omega} \quad \forall \xi \in H^1(\Omega),$$

se deduce inmediatamente que

$$\begin{aligned} |a^n(\varphi, \psi)| &\leq \tilde{C} \|\varphi\|_{1,2,\Omega} \|\psi\|_{1,2,\Omega}, \\ |L^n(\psi)| &\leq \tilde{C} \|\vartheta\|_{1,2,\Omega} \|\psi\|_{1,2,\Omega}. \end{aligned} \tag{1.172}$$

siendo \tilde{C} dependiente, además de los datos del problema, también de Δt . Entonces a^n es una forma bilineal continua y $L^n \in (H^1(\Omega))'$, para todo $0 \leq n \leq N-1$. Teniendo en cuenta la notación introducida, para demostrar el resultado basta comprobar que para cada $0 \leq n \leq N-1$ el problema

$$\begin{cases} \varphi \in \mathcal{W} \\ a^n(\varphi, \psi) = L^n(\psi) \quad \forall \psi \in \mathcal{W}, \end{cases} \tag{1.173}$$

tiene solución única. Si comprobamos que la forma bilineal a^n es coerciva para todo $0 \leq n \leq N-1$, entonces aplicando el teorema de Lax-Milgran⁶ se deduce que el problema (1.173) tiene una única solución, por lo que se tiene el resultado. Veamos que la forma bilineal a^n es coerciva. Teniendo en cuenta la Hipótesis 1.4 y que $n_1 = d$ se tiene

$$\Lambda ||\mathbf{w}||_{0,2,\Omega}^2 \leq \langle A\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{0,\Omega}, \quad (1.174)$$

para todo $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$. Entonces, teniendo en cuenta esta desigualdad, y los Lemas 1.5.2 y 1.5.4 se deduce inmediatamente que a^n es coerciva. \square

⁶Nótese que \mathcal{W} es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$, por lo tanto es un espacio de Hilbert.

Capítulo 2

Estabilidad del método de Crank-Nicholson Lagrangiano

2.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es obtener resultados de estabilidad del método semidiscretizado (1.171); donde el coeficiente de difusión puede ser degenerado. En concreto presentamos dos: uno para la solución discreta en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$, es decir, norma infinito discreta en tiempo y L^2 en espacio; y otro para la solución discreta en norma $l^\infty(L^2(\Gamma^R))$ y para su gradiente en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$. Dichas cotas dependen únicamente de los datos del problema y son independientes de Δt . El primer resultado de estabilidad se enuncia en el Teorema 2.3.1. La demostración se basa en el Lema 2.3.1 y el Lema 2.3.2. En este teorema también se obtiene una acotación para la suma de dos soluciones discretas consecutivas en norma $l^2(L^2(\Gamma^R))$ y para sus gradientes en norma $l^2(L^2(\Omega))$. Las constantes que aparecen en dicho teorema son independientes del coeficiente (tensorial) de difusión, por lo que el resultado es válido incluso para el problema de transporte (difusión cero). El segundo resultado de estabilidad se enuncia en el Teorema 2.4.1. La demostración se basa en los Lemas 2.4.1, 2.4.2 y 2.4.3. Para conseguir estas estimaciones será necesario asumir hipótesis de regularidad más fuertes, que las del Teorema 2.3.1, sobre la aplicación g que aparece en la condición Robin de (1.8). Sin embargo, este resultado mejora al primero con respecto a la norma $l^\infty(L^2(\Gamma^R))$ de la suma de dos soluciones discretas consecutivas y a la norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ de sus gradientes, puesto que se obtienen acotaciones para la solución discreta en norma $l^\infty(L^2(\Gamma^R))$ y para su gradiente en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$. Por otro lado, también se acota la derivada discreta de la solución discreta en norma $l^2(L^2(\Omega))$. Naturalmente, las constantes que aparecen en este teorema dependen del coeficiente (tensorial) de difusión. Sin embargo, cabe destacar que las cotas obtenidas son uniformes para todo coeficiente tensorial de difusión, A , que cumpla que el cociente entre el cuadrado de la norma $W^{1,\infty}$ de su raíz y el mínimo de sus autovalores está uniformemente acotado¹. Concretamente, si $A = \varepsilon I$ se cumple dicha propiedad y por lo tanto obtenemos cotas uniformes cuando ε tiende a cero. Además las desigualdades son válidas cuando $A = \Theta$. En este caso se consiguen acotaciones para la derivada discreta de la solución discreta en norma $l^2(L^2(\Omega))$ y para la solución discreta en norma $l^2(L^2(\Gamma^R))$. En [68] se obtienen resultados de estabilidad para el método (1.63). Sin embargo, las estimaciones para la solución discreta en norma $l^\infty(L^2(\Gamma^R))$ y para su gradiente en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ tienden a infinito conforme Δt tiende a cero. Concretamente, en este caso se consigue acotar únicamente la solución discreta en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$. En este trabajo mejoramos dichos resultados puesto que obtenemos estimaciones independientes de Δt .

¹Nótese que estamos acotando la norma del gradiente multiplicada por la raíz cuadrada de Λ .

2.2. Notaciones y resultados preliminares

Antes de analizar la estabilidad del método, introducimos ciertas notaciones e hipótesis sobre los datos. En primer lugar, introducimos los operadores

$$\mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}\phi \in (H^1(\Omega))' \text{ y } \mathcal{F}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \in (H^1(\Omega))',$$

definidos, para $\phi \in C^0(H^1(\Omega))$, como

$$\left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}\phi, \psi \right\rangle := \frac{1}{\Delta t} \left\langle \mathcal{D}_{\Delta t}^{n, \frac{1}{2}, RK}[\widehat{\phi}], \psi \right\rangle_{0, \Omega} + \left\langle \mathcal{M}_{\Delta t}^{n, \frac{1}{2}, RK}[\widehat{\phi}], \psi \right\rangle \quad \forall \psi \in H^1(\Omega),$$

y

$$\left\langle \mathcal{F}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle := \left\langle \mathcal{N}_{\Delta t}^{n, \frac{1}{2}, RK}, \psi \right\rangle \quad \forall \psi \in H^1(\Omega).$$

Entonces, utilizando esta notación, el problema (1.171) se escribe como sigue

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } \phi_{m, \Delta t}^0 \in H^1(\Omega), \text{ encontrar } \widehat{\phi_{m, \Delta t}} = \{\phi_{m, \Delta t}^n\}_{n=1}^N \in [\mathcal{W}]^N \text{ tal que} \\ \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}[\widehat{\phi_{m, \Delta t}}], \psi \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle \\ \text{para todo } \psi \in \mathcal{W} \text{ y } n = 0, \dots, N-1. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Como consecuencia de la Hipótesis 1.4, existe una única matriz simétrica y definida positiva de dimensión $n_1 \times n_1$, que denotamos por C_{n_1} , tal que $A_{n_1} = C_{n_1}^2$. Llamamos C a la matriz simétrica y semidefinida positiva de dimensión $d \times d$ que es la completación por ceros de C_{n_1} , es decir

$$C = \begin{pmatrix} C_{n_1} & \Theta \\ \Theta & \Theta \end{pmatrix}.$$

Nótese que $A = C^2$ y $C_{ij} \in W^{1, \infty}(\mathcal{O}^\delta)$, $1 \leq i, j \leq d$. Consideramos la matriz G , con coeficientes $G_{ij} = |\text{grad } C_{ij}|$, $1 \leq i, j \leq d$, y denotamos por c_A la constante

$$c_A = \max\{\|G\|_{0, \infty, \mathcal{O}^\delta}^2, \|C\|_{0, \infty, \mathcal{O}^\delta}^2\}. \quad (2.2)$$

Denotamos por B la siguiente matriz de dimensión $d \times d$

$$B = \begin{pmatrix} I_{n_1} & \Theta \\ \Theta & \Theta \end{pmatrix},$$

siendo I_{n_1} la matriz identidad de dimensión $n_1 \times n_1$. Entonces bajo la Hipótesis 1.4 y utilizando la notación previa, se verifica

$$\Lambda \|B\mathbf{w}\|_{0, 2, \Omega}^2 \leq \langle A\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{0, \Omega}, \quad (2.3)$$

para todo $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$.

Hipótesis 2.1. *Asumiendo la Hipótesis 1.1, el campo de velocidades \mathbf{v} verifica*

$$(I - B)L(x, t)B = 0 \quad \forall (x, t) \in \mathcal{T}^\delta. \quad (2.4)$$

Nota 2.2.1. La Hipótesis 2.1 es equivalente a decir que las $d - n_1$ últimas componentes de la velocidad dependen únicamente de las $d - n_1$ últimas variables.

Nota 2.2.2. Bajo la Hipótesis 2.1, para toda matriz E de dimensión $d \times d$ de la forma dada en (1.165) y para todo par de vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathcal{V}$ se obtiene inmediatamente

$$\langle EL^T \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_{0,\Omega} = \langle EL^T B \mathbf{w}_1, B \mathbf{w}_2 \rangle_{0,\Omega}. \quad (2.5)$$

Lema 2.2.1. Supongamos que se verifica la Hipótesis 2.1 y además $\Delta t < \min\{\eta, \frac{1}{2c}\}$, siendo η la constante que aparece en el Lema 1.5.1 y c la constante definida en (1.123). Entonces existe una constante positiva $\tilde{c}_3 > 0$ dependiente de c y T , tal que

$$|B(F_i^n)^{-T}(p)\mathbf{w}| \geq \tilde{c}_3 |B\mathbf{w}|,$$

siendo $p \in \overline{\Omega}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$, $n = 0, \dots, N$ e $i = E, RK, RK2$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, teniendo en cuenta que se cumple (2.4), se comprueba fácilmente, por inducción, que las matrices $F_i^n(p)$ verifican

$$(I - B)F_i^n(p)B = 0, \quad (2.6)$$

para $n = 0, \dots, N$ e $i = E, RK, RK2$. En efecto, veamos que este resultado es cierto para F_E^n , con $n = 0, \dots, N$, para ello procedemos por inducción. Para $n = 0$ trivialmente

$$(I - B)F_E^0 B = (I - B)B = 0.$$

Supongamos que $(I - B)F_E^{n-1}(p)B = 0$ veamos que esta propiedad también se verifica para $F_E^n(p)$, siendo $n = 1, \dots, N$. En efecto, teniendo en cuenta (1.113) y la Hipótesis 2.1 se deduce

$$\begin{aligned} (I - B)F_E^n(p)B &= (I - B)(I + \Delta t L^{n-1}(X_E^{n-1}(p))) F_E^{n-1}(p)B \\ &= (I - B)(I + \Delta t L^{n-1}(X_E^{n-1}(p))) B F_E^{n-1}(p)B \\ &= ((I - B)B + \Delta t (I - B)L^{n-1}(X_E^{n-1}(p))B) F_E^{n-1}(p)B = 0, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que, por la hipótesis de inducción, se verifica

$$F_E^{n-1}(p)B = B F_E^{n-1}(p)B.$$

La demostración para los demás casos es análoga. Entonces, a partir de (2.6) se tiene

$$B(F_i^n)^T(p) = B(F_i^n)^T(p)B,$$

y por tanto

$$|B\mathbf{w}| = |B(F_i^n)^T(p)(F_i^n)^{-T}(p)\mathbf{w}| = |B(F_i^n)^T(p)B(F_i^n)^{-T}(p)\mathbf{w}|.$$

Entonces, a partir de esta expresión y de (1.134) se deduce el resultado. \square

Introducimos la constante

$$c_v = \max_{t \in [0, T]} \|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_{1, \infty, \Omega_t^\delta}, \quad (2.7)$$

siendo $\|\cdot\|_{1, \infty, \Omega_t^\delta}$ la norma (1.28) equivalente a la usual. Además, \bar{c}_v (respectivamente, J y D) denotará una constante positiva genérica asociada a la norma de la velocidad \mathbf{v} (respectivamente, a los datos del

problema), que puede ser distinta en cada aparición.

Denotamos por $l^\infty(L^2(\Omega))$ y $l^2(L^2(\Omega))$ los espacios de sucesiones $l^\infty((0, T), L^2(\Omega))$ y $l^2((0, T), L^2(\Omega))$, respectivamente, dotados de las normas

$$\|\widehat{\psi}\|_{l^\infty(L^2(\Omega))} := \max_{n=0}^N \|\psi^n\|_{0,2,\Omega}, \quad \|\widehat{\psi}\|_{l^2(L^2(\Omega))} := \sqrt{\Delta t \sum_{n=0}^N \|\psi^n\|_{0,2,\Omega}^2}.$$

Utilizamos notaciones análogas para los espacios y las normas asociadas a la condición de Robin y para las aplicaciones que tengan como conjunto de llegada el espacio vectorial \mathcal{V} .

En adelante, denotamos por $\widehat{f \circ X_{RK}}$ y $\widehat{g \circ X_{RK}}$ las siguientes sucesiones funcionales

$$\{f \circ X_{RK}\}^n := f^n \circ X_{RK}^n, \quad \{g \circ X_{RK}\}^n := g^n \circ X_{RK}^n \quad 0 \leq n \leq N.$$

Antes de comenzar con el análisis teórico, recordamos la siguiente desigualdad que será utilizada en lo que sigue

$$ab \leq \frac{1}{2} \left(\epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2 \right), \quad (2.8)$$

que se verifica para dos números reales a y b y para $\epsilon > 0$.

2.3. Estabilidad en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ del método semidiscretizado

Lema 2.3.1. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 1.1, 1.3, 1.4 y 2.1. Además, asumimos $\Delta t < \min\{\eta/2, \delta/(2c_v), 1/c_v, 1/(2c), K\}$, siendo η y K las constantes que aparecen, respectivamente, en el Lema 1.5.1 y en el Corolario 1.5.3. Sea $\widehat{\phi_{m,\Delta t}}$ la solución de (2.1) y $\alpha > 0$ la constante que aparece en la condición Robin de (1.8). Entonces, se cumple*

$$\begin{aligned} & \left\langle \widehat{\mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \phi_{m,\Delta t}}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle \\ & \geq \frac{1}{\Delta t} \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{\Delta t} \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2 \\ & + \frac{1}{4} \left\| C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \left(\nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ & + \frac{1}{4} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \left(\nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ & + \frac{\alpha}{4} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \left(\phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \right) \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ & - \widehat{c} \gamma \left(\|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\sqrt{\det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

siendo $\widehat{c} = \rho_{1,\infty}(c_v + \bar{c}_v \Delta t)/\gamma$ y $n \in \{0, \dots, N-1\}$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar descomponemos

$$\left\langle \widehat{\mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \phi_{m,\Delta t}}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle = I_1 + I_2 + I_3,$$

siendo

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left\langle \frac{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)}{2} \frac{\phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n}{\Delta t}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle_{0,\Omega}, \\
I_2 &= \frac{1}{4} \left\langle ((F_{RK}^{n+1})^{-1} A \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \det F_{RK}^{n+1} \right. \\
&\quad \left. + (F_{RK}^n)^{-1} A \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \det F_{RK}^n) \left(\nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \right), \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle_{0,\Omega}, \\
I_3 &= \frac{\alpha}{4} \left\langle (|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n) \left(\phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \right) \right. \\
&\quad \left. , \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle_{0,\Gamma^R}.
\end{aligned}$$

La cota inferior para I_1 se obtiene a partir de la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left\langle \frac{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)}{2} \frac{\phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n}{\Delta t}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle_{0,\Omega} \\
&= \frac{1}{2\Delta t} \left\| \sqrt{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)} \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\quad - \frac{1}{2\Delta t} \left\| \sqrt{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&= \frac{1}{2\Delta t} \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{2\Delta t} \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2\Delta t} \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{2\Delta t} \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Introducimos la siguiente función

$$\begin{aligned}
Y_{RK}^n(p, \cdot) : [t_n, t_{n+1}] &\longrightarrow \Omega_{t_n}^\delta \\
s &\longrightarrow X_{RK}^n(p) - (t_n - s) \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

que verifica $Y_{RK}^n(p, t_n) = X_{RK}^n(p)$ y $Y_{RK}^n(p, t_{n+1}) = X_{RK}^{n+1}(p)$. Veamos detalladamente que $Y_{RK}^n(p, \cdot) \subset \Omega_{t_n}^\delta$. Utilizando la desigualdad (1.129) que aparece en la demostración del Lema 1.5.1 se deduce

$$\begin{aligned}
|Y_{RK}^n(p, s) - X_e^n(p)| &= |X_{RK}^n(p) - (t_n - s) \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) - X_e^n(p)| \\
&\leq |X_{RK}^n(p) - X_e^n(p)| + \Delta t c_v \leq \exp\left(Tc \exp\left(\frac{\Delta t}{2}c\right)\right) \frac{T}{2} c \Delta t \left(1 + \frac{\Delta t}{2}c\right) + \Delta t c_v.
\end{aligned}$$

Por hipótesis

$$\Delta t < \min\left\{\frac{\eta}{2}, \frac{\delta}{2c_v}, \frac{1}{c_v}, \frac{1}{2c}\right\},$$

en particular $c\Delta t < 1$. Además

$$\eta < \min\left\{\frac{1}{c}, \frac{4\delta}{3 \exp(Tc \exp(\frac{1}{2}))Tc}\right\},$$

por lo que se tiene

$$|Y_{RK}^n(p, s) - X_e^n(p)| \leq \Delta t \frac{3}{4} \exp\left(Tc \exp\left(\frac{1}{2}\right)\right) Tc + \Delta t c_v < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Por hipótesis ρ es una función diferenciable y además por definición $Y_{RK}^n(p, \cdot)$ también es diferenciable, entonces se verifica

$$\rho(X_{RK}^n(p)) = \rho(X_{RK}^{n+1}(p)) - \zeta^n(p) \quad \text{c.p.d. } p \in \Omega, \quad (2.12)$$

donde

$$\zeta^n(p) := \int_{t_n}^{t_{n+1}} \text{grad } \rho(Y_{RK}^n(p, s)) \cdot \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) ds. \quad (2.13)$$

Además se cumple

$$|\zeta^n(p)| \leq \rho_{1,\infty} c_v \Delta t. \quad (2.14)$$

A partir del Corolario 1.5.3 y 1.5.4 se deducen las siguientes expresiones para los determinantes de las matrices Jacobianas

$$\det F_{RK}^n(p) = (1 - \Delta t \text{div } \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) + O(\Delta t^2)) \det F_{RK}^{n+1}(p), \quad (2.15)$$

$$\det F_{RK}^{n+1}(p) = (1 + \Delta t \text{div } \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) + O(\Delta t^2)) \det F_{RK}^n(p), \quad (2.16)$$

siendo $O(\Delta t^2)$ dependiente de \mathbf{v} . Entonces utilizando (2.12) e introduciendo estas expresiones en (2.10), se deduce

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\Delta t} \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{2\Delta t} \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &+ \frac{1}{2\Delta t} \|\sqrt{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} - \zeta^n) \det F_{RK}^{n+1} (1 - \Delta t \text{div } \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \circ Y^n + O(\Delta t^2))} \phi_{m,\Delta t}^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &- \frac{1}{2\Delta t} \|\sqrt{(\rho \circ X_{RK}^n + \zeta^n) \det F_{RK}^n (1 + \Delta t \text{div } \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \circ Y^n + O(\Delta t^2))} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &\geq \frac{1}{2\Delta t} \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{2\Delta t} \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &+ \frac{(1 - \Delta t c_v + O(\Delta t^2))}{2\Delta t} \|\sqrt{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} - \zeta^n) \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &- \frac{(1 + \Delta t c_v + O(\Delta t^2))}{2\Delta t} \|\sqrt{(\rho \circ X_{RK}^n + \zeta^n) \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Por último, utilizando la desigualdad (2.14) y que $c_v \Delta t < 1$ se obtiene la siguiente cota inferior para I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &\geq \frac{1}{2\Delta t} \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{2\Delta t} \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &+ \frac{(1 - \Delta t c_v)}{2\Delta t} \left\{ \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 - \rho_{1,\infty} c_v \Delta t \|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 \right\} \\ &- \frac{(1 + \Delta t c_v)}{2\Delta t} \left\{ \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2 + \rho_{1,\infty} c_v \Delta t \|\sqrt{\det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2 \right\} \\ &+ \rho_{1,\infty} O(\Delta t) \left\{ \|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\sqrt{\det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2 \right\} \\ &\geq \frac{1}{\Delta t} \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{\Delta t} \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &- \rho_{1,\infty} (c_v + O(\Delta t)) \left\{ \|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\sqrt{\det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

La cota para I_2 se obtiene inmediatamente teniendo en cuenta que el tensor A verifica $A^2 = C$ siendo C

simétrico. En efecto,

$$\begin{aligned}
I_2 &:= \frac{1}{4} \left\langle \left((F_{RK}^{n+1})^{-1} A \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \det F_{RK}^{n+1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (F_{RK}^n)^{-1} A \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \det F_{RK}^n \right) \left(\nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \right), \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle_{0,\Omega} \\
&= \frac{1}{4} \left\| C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \left(\nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \left(\nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Para I_3 es suficiente tener en cuenta que se verifica

$$\begin{aligned}
I_3 &:= \frac{\alpha}{4} \left\langle \left(|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n \right) \left(\phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \right) \right. \\
&\quad \left. , \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle_{0,\Gamma^R} \\
&= \frac{\alpha}{4} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \left(\phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \right) \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Finalmente, la desigualdad (2.9) se obtiene de la desigualdad (2.17) y de las igualdades (2.18) y (2.19). \square

Lema 2.3.2. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 1.1, 1.5, 1.6, además $\Delta t < \min\{\eta, 1/(2c), K\}$, siendo η y K las constantes que aparecen, respectivamente, en el Lema 1.5.1 y en el Corolario 1.5.3. Entonces se cumple*

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{f^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + f^n \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n}{2}, \psi + \varphi \right\rangle_{0,\Omega} \\
&+ \left\langle \frac{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| g^n \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n}{2}, \psi + \varphi \right\rangle_{0,\Gamma^R} \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\|f^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|f^n \circ X_{RK}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
&+ \left(\frac{1}{2} + \bar{c}_v \Delta t \right) \left(\|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \psi\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\sqrt{\det F_{RK}^n} \varphi\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
&+ \frac{1}{2\alpha} \|\sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} g^n \circ X_{RK}^n\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \frac{1}{2\alpha} \|\sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1}\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
&+ \frac{\alpha}{8} \|\sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \{\psi + \varphi\}\|_{0,2,\Gamma^R}^2,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

para todo par de funciones $\varphi, \psi \in H^1(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, dadas $\psi, \varphi \in H^1(\Omega)$ introducimos,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left\langle \frac{f^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + f^n \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n}{2}, \psi + \varphi \right\rangle_{0,\Omega}, \\
I_2 &= \left\langle \frac{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| g^n \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n}{2}, \psi + \varphi \right\rangle_{0,\Gamma^R}.
\end{aligned}$$

La cota para I_1 se obtiene utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (2.8), (2.15) y (2.16). Concretamente,

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{\|f^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2}{2} + \frac{\|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \psi\|_{0,2,\Omega}^2}{4} \\
&+ \frac{\|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \varphi\|_{0,2,\Omega}^2}{4} + \frac{\|f^n \circ X_{RK}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2}{2} \\
&+ \frac{\|\sqrt{\det F_{RK}^n} \psi\|_{0,2,\Omega}^2}{4} + \frac{\|\sqrt{\det F_{RK}^n} \varphi\|_{0,2,\Omega}^2}{4} \\
&= \frac{1}{2} \left(\|f^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|f^n \circ X_{RK}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
&+ \frac{\|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \psi\|_{0,2,\Omega}^2}{4} + \frac{\|\sqrt{\det F_{RK}^n} \varphi\|_{0,2,\Omega}^2}{4} \\
&+ \frac{1}{4} \|\sqrt{(1 - \Delta t \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) + O(\Delta t^2)) \det F_{RK}^{n+1}(p)} \psi\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&+ \frac{1}{4} \|\sqrt{(1 + \Delta t \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) + O(\Delta t^2)) \det F_{RK}^n(p)} \varphi\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\|f^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|f^n \circ X_{RK}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
&+ \left(\frac{1}{2} + \bar{c}_v \Delta t \right) \left(\|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \psi\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\sqrt{\det F_{RK}^n} \varphi\|_{0,2,\Omega}^2 \right).
\end{aligned}$$

La cota para I_2 se obtiene utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (2.8) con $\epsilon = \alpha$. En efecto,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left\langle \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} g^n \circ X_{RK}^n, \frac{\sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \{\psi + \varphi\}}{2} \right\rangle_{0,\Gamma^R} \\
&+ \left\langle \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1}, \frac{\sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \{\psi + \varphi\}}{2} \right\rangle_{0,\Gamma^R} \\
&\leq \frac{1}{2\alpha} \|\sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} g^n \circ X_{RK}^n\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \frac{\alpha}{8} \|\sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \{\psi + \varphi\}\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
&+ \frac{1}{2\alpha} \|\sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1}\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \frac{\alpha}{8} \|\sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \{\psi + \varphi\}\|_{0,2,\Gamma^R}^2.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Entonces, utilizando las desigualdades obtenidas, se tiene el resultado. \square

En lo que sigue, dada $\widehat{\psi} = \{\psi^n\}_{n=0}^N$, denotaremos por $\widehat{\mathcal{S}}[\widehat{\psi}]$ y $\widehat{\mathcal{R}}_{\Delta t}[\widehat{\psi}]$, las siguientes sucesiones

$$\widehat{\mathcal{S}}[\widehat{\psi}] := \{\psi^{n+1} + \psi^n\}_{n=0}^{N-1}, \quad \widehat{\mathcal{R}}_{\Delta t}[\widehat{\psi}] := \left\{ \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} \right\}_{n=0}^{N-1}.$$

Teorema 2.3.1. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 y 2.1. Sea $\widehat{\phi_{m,\Delta t}}$ la solución de (2.1) sujeta a la condición inicial $\phi_{m,\Delta t}^0 \in H^1(\Omega)$. Entonces, existen dos constantes positivas, J y D , tales que para $\Delta t < D$, se verifica*

$$\begin{aligned} & \sqrt{\gamma} \|\sqrt{\det F_{RK}} \widehat{\phi_{m,\Delta t}}\|_{l^\infty(L^2(\Omega))} + \sqrt{\frac{\Lambda}{4}} \left\| B F_{RK}^{-T} \mathcal{S}[\nabla \widehat{\phi_{m,\Delta t}}] \sqrt{\det F_{RK}} \right\|_{l^2(\mathbf{L}^2(\Omega))} \\ & + \sqrt{\frac{\alpha}{8}} \left\| \sqrt{\mathcal{S} \left[|F_{RK}^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK} \right] \mathcal{S}[\phi_{m,\Delta t}]} \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} \leq J(\sqrt{\gamma} \|\phi_{m,\Delta t}^0\|_{0,2,\Omega}) \\ & + \|\sqrt{\det F_{RK}} f \circ X_{RK}\|_{l^2(L^2(\Omega))} + \|\sqrt{|(F_{RK})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}} g \circ X_{RK}\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

siendo J y D constantes independientes del coeficiente tensorial de difusión.

DEMOSTRACIÓN. La sucesión $\widehat{\phi_{m,\Delta t}}$ solución de (2.1) satisface

$$\left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\phi_{m,\Delta t}}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle. \quad (2.23)$$

Aplicando el Lema 2.3.1 y el Lema 2.3.2 con $\psi = \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \in \mathcal{W} \subset H_{\Gamma^D}^1(\Omega)$ y $\varphi = \phi_{m,\Delta t}^n \in \mathcal{W} \subset H_{\Gamma^D}^1(\Omega)$ se sigue

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{\Delta t} \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2 \\ & + \frac{1}{4} \left\| C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \left(\nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ & + \frac{1}{4} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \left(\nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ & + \frac{\alpha}{8} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \left(\phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \right) \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\|f^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|f^n \circ X_{RK}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\ & + \frac{1}{2\alpha} \|\sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} g^n \circ X_{RK}^n\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \frac{1}{2\alpha} \|\sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1}\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ & + \widehat{c}\gamma \left(\|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\sqrt{\det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2 \right), \end{aligned} \quad (2.24)$$

siendo $\widehat{c} = \max \{(1 + \bar{c}_v \Delta t)/\gamma, 2\rho_{1,\infty}(c_v + \bar{c}_v \Delta t)/\gamma\}$. Dado $q \geq 1$ sumamos desde $n = 0$ hasta $n = q - 1$ a ambos lados de la desigualdad (2.24) multiplicada por Δt , obteniendo

$$\begin{aligned} & \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^q \det F_{RK}^q} \phi_{m,\Delta t}^q\|_{0,2,\Omega}^2 - \|\sqrt{\rho} \phi_{m,\Delta t}^0\|_{0,2,\Omega}^2 \\ & + \frac{\Delta t}{4} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \left(\nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ & + \frac{\alpha \Delta t}{8} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \left(\phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \right) \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ & \leq \Delta t \sum_{n=0}^q \|f^n \circ X_{RK}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{\Delta t}{\alpha} \sum_{n=0}^q \|\sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} g^n \circ X_{RK}^n\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ & + \widehat{c}\gamma \Delta t \left(\|\sqrt{\det F_{RK}^q} \phi_{m,\Delta t}^q\|_{0,2,\Omega}^2 + 2 \sum_{n=0}^{q-1} \|\sqrt{\det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2 \right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde hemos omitido algún término positivo de la izquierda de la desigualdad. Introducimos las siguientes notaciones

$$\begin{aligned}\theta_n^1 &:= \gamma \|\sqrt{\det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2 \\ \theta_n^2 &:= \frac{\Lambda}{4} \sum_{s=0}^{n-1} \Delta t \left\| B(F_{RK}^s)^{-T} \left(\nabla \phi_{m,\Delta t}^{s+1} + \nabla \phi_{m,\Delta t}^s \right) \sqrt{\det F_{RK}^s} \right\|_{0,2,\Omega}^2, \\ \bar{\theta}_n &:= \frac{\alpha}{8} \sum_{s=0}^{n-1} \Delta t \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{s+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{s+1} + |(F_{RK}^s)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^s} \left(\phi_{m,\Delta t}^{s+1} + \phi_{m,\Delta t}^s \right) \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las Hipótesis 1.3 y 1.4 y la notación introducida, se deduce

$$\begin{aligned}(1 - \widehat{c}\Delta t)\theta_q^1 + \theta_q^2 + \bar{\theta}_q &\leq 2\widehat{c}\Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \theta_n^1 \\ &+ \beta \left(\theta_0^1 + \|\sqrt{\widehat{\det F_{RK}}} f\|_{l^2(L^2(\Omega))}^2 + \|\sqrt{|F_{RK}^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}} g\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))}^2 \right),\end{aligned}$$

siendo β una constante positiva. Si Δt es suficientemente pequeño podemos aplicar el Lema de Gronwall en su versión discreta (ver [67]) y aplicar el máximo para $q \in \{1, \dots, N\}$. De esta manera se consigue (2.22). \square

Corolario 2.3.1. *Asumimos las Hipótesis del Teorema 2.3.1. Sea $\widehat{\phi_{m,\Delta t}}$ la solución de (2.1) sujeta a la condición inicial $\phi_{m,\Delta t}^0 \in H^1(\Omega)$. Entonces, existen dos constantes positivas, J y D , tales que para $\Delta t < D$, se verifica*

$$\begin{aligned}&\sqrt{\gamma} \|\widehat{\phi_{m,\Delta t}}\|_{l^\infty(L^2(\Omega))} + \sqrt{\frac{\Lambda}{4}} \left\| B \mathcal{S}[\widehat{\nabla \phi_{m,\Delta t}}] \right\|_{l^2(L^2(\Omega))} + \sqrt{\frac{\alpha}{8}} \left\| \mathcal{S}[\widehat{\phi_{m,\Delta t}}] \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} \\ &\leq J \left(\sqrt{\gamma} \|\phi_{m,\Delta t}^0\|_{0,2,\Omega} + \|f \circ \widehat{X_{RK}}\|_{l^2(L^2(\Omega))} + \|g \circ \widehat{X_{RK}}\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} \right),\end{aligned}\tag{2.26}$$

siendo J y D constantes independientes del coeficiente tensorial de difusión.

DEMOSTRACIÓN. El resultado se deduce teniendo en cuenta los Lemas 1.5.4, 2.2.1 y el Teorema 2.3.1. \square

2.4. Estabilidad en norma $l^\infty(H^1(\Omega))$ del método semidiscretizado

A continuación vamos a establecer un resultado de estabilidad para el gradiente de la solución discreta. Dicho resultado se enuncia en el Teorema 2.4.1 y la prueba se basa en los siguientes lemas.

Lema 2.4.1. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 1.1, 1.3, 1.4 y 2.1. Además, asumimos $\Delta t < \min\{\eta/2, \delta/(2c_v), 1/(2c), K\}$, siendo η y K las constantes que aparecen, respectivamente, en el Lema 1.5.1 y en el Corolario 1.5.3. Sea $\widehat{\phi_{m,\Delta t}^{n+1/2}}$ la solución de (2.1) y $\alpha > 0$ la constante que aparece en la condición Robin de (1.8). Entonces, se cumple*

$$\begin{aligned}
& \left\langle \widehat{\mathcal{L}_{\Delta t}^{n+1/2} \phi_{m,\Delta t}}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle \\
& \geq \frac{1}{2\Delta t} \left\| \sqrt{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)} \left(\phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n \right) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{1}{2} \left\| C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{2} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{\alpha}{2} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 - \frac{\alpha}{2} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& - \widehat{c} \Delta t \Lambda \left(\|B(F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|B(F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
& - \widehat{c} \Delta t \alpha \left(\left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right), \tag{2.27}
\end{aligned}$$

siendo $\widehat{c} = \max\{c_A \bar{c}_v / \Lambda, \bar{c}_v\}$ y $n \in \{0, \dots, N-1\}$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar descomponemos

$$\left\langle \widehat{\mathcal{L}_{\Delta t}^{n+1/2} \phi_{m,\Delta t}}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle = I_1 + I_2 + I_3,$$

siendo

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left\langle \frac{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)}{2} \frac{\phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n}{\Delta t}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle_{0,\Omega}, \\
I_2 &= \frac{1}{4} \left\langle ((F_{RK}^{n+1})^{-1} A \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \det F_{RK}^{n+1} \right. \\
& \quad \left. + (F_{RK}^n)^{-1} A \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \det F_{RK}^n) \left(\nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \right), \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle_{0,\Omega}, \\
I_3 &= \frac{\alpha}{4} \left\langle (|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n) \left(\phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \right) \right. \\
& \quad \left. , \phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle_{0,\Gamma^R}.
\end{aligned}$$

Para I_1 se tiene la siguiente expresión

$$I_1 = \frac{1}{2\Delta t} \left\| \sqrt{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)} \left(\phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n \right) \right\|_{0,2,\Omega}^2. \tag{2.28}$$

Obtengamos una cota inferior para I_2 . En primer lugar se verifica

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{4} \left\| C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&- \frac{1}{4} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&+ \frac{1}{4} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&- \frac{1}{4} \left\| C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \right\|_{0,2,\Omega}^2.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

A continuación escribiremos las aplicaciones que aparecen en los dos últimos sumandos en el instante temporal dado por el gradiente de $\phi_{m,\Delta t}$. En virtud del Lema 1.5.3 se tiene

$$(F_{RK}^{n+1})^{-T}(p) = \left(I - \Delta t L^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) + O(\Delta t^2) \right)^T (F_{RK}^n)^{-T}(p), \tag{2.30}$$

donde $O(\Delta t^2)$ depende de \mathbf{v} y verifica (2.4). Además, podemos escribir $(F_{RK}^n)^{-T}$ como

$$(F_{RK}^n)^{-T} = \left(I + \Delta t L^{n+\frac{1}{2}} \circ Y^n + O(\Delta t^2) \right)^T (F_{RK}^{n+1})^{-T}, \tag{2.31}$$

donde $O(\Delta t^2)$ depende de \mathbf{v} y verifica (2.4). Además, como A_{n_1} es simétrica, definida positiva y diferenciable se verifica que $C_{n_1} = \sqrt{A_{n_1}}$ es una aplicación diferenciable y por lo tanto su compleción por ceros, que hemos denotado por C , también lo es. Entonces aplicando la regla de Barrow y la regla de la cadena se tiene

$$C(X_{RK}^{n+1}(p)) = C(X_{RK}^n(p)) + D^n(p) \quad \text{c.p.d } p \in \Omega, \tag{2.32}$$

donde

$$D_{ij}^n(p) := \int_{t_n}^{t_{n+1}} \text{grad } C_{ij}(Y_{RK}^n(p, s)) \cdot \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)), \tag{2.33}$$

siendo Y_{RK}^n la función definida en (2.11). Además se verifica

$$\|D^n\|_{0,\infty,\Omega} \leq c_v \sqrt{c_A} \Delta t. \tag{2.34}$$

Utilizando (2.15) y (2.31), se deduce

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \|C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&= \frac{1}{4} \|C \circ X_{RK}^n (I + \Delta t L^{n+\frac{1}{2}} \circ Y^n + O(\Delta t^2))^T (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \\
&\quad \sqrt{1 - \Delta t \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \circ Y^n + O(\Delta t^2)} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\geq \frac{(1 - \bar{c}_v \Delta t)}{4} \|C \circ X_{RK}^n (I + \Delta t L^{n+\frac{1}{2}} \circ Y^n + O(\Delta t^2))^T (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\geq \frac{1}{4} \left\{ \|C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega} \right. \\
&\quad \left. - \Delta t \|C \circ X_{RK}^n (L^{n+\frac{1}{2}} \circ Y^n + O(\Delta t))^T (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega} \right\}^2 \\
&\quad - c_A \bar{c}_v \Delta t \|B(F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \|C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega} \right. \\
&\quad + \Delta t^2 \|C \circ X_{RK}^n (L^{n+\frac{1}{2}} \circ Y^n + O(\Delta t))^T (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\quad - 2\Delta t \|C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega} \\
&\quad \left. \|C \circ X_{RK}^n (L^{n+\frac{1}{2}} \circ Y^n + O(\Delta t))^T (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega} \right\} \\
&\quad - c_A \bar{c}_v \Delta t \|B(F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2,
\end{aligned}$$

como consecuencia, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \|C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 &\geq \frac{1}{4} \|C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\quad - c_A \bar{c}_v \Delta t \|B(F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2,
\end{aligned}$$

Además, teniendo en cuenta la igualdad (2.32) y la desigualdad (2.34), se deduce

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \|C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 &\geq \frac{1}{4} \|C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\quad - c_A \bar{c}_v \Delta t \|B(F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Por otro lado, utilizando las igualdades (2.16), (2.30), (2.32) y la desigualdad (2.34) se consigue

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4} \|C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 &\geq -\frac{1}{4} \|C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\quad - c_A \bar{c}_v \Delta t \|B(F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

La prueba es análoga a la demostración de (2.35). Por último, introduciendo las desigualdades (2.35) y

(2.36) en la igualdad (2.29) obtenemos la cota inferior para I_2 :

$$\begin{aligned}
I_2 &\geq \frac{1}{2} \left\| \left| C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \right| \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\| \left| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^n} \right| \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\quad - c_A \bar{c}_v \Delta t \left\| \left| C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \right| \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\quad - c_A \bar{c}_v \Delta t \left\| \left| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^n} \right| \right\|_{0,2,\Omega}^2.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Obtengamos la cota inferior para I_3 . En primer lugar se verifica

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{\alpha}{4} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 - \frac{\alpha}{4} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
&\quad + \frac{\alpha}{4} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 - \frac{\alpha}{4} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

A continuación, vamos a escribir las aplicaciones que aparecen en los dos últimos sumandos de esta igualdad en el instante temporal dado por $\phi_{m,\Delta t}$. Teniendo en cuenta las igualdades (2.16) y (2.30), y (2.15) y (2.31) se deducen facilmente las siguientes expresiones

$$|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} = (1 + O(\Delta t)) |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n, \tag{2.39}$$

$$|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n = (1 + O(\Delta t)) |(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}, \tag{2.40}$$

siendo $O(\Delta t)$ dependiente de \mathbf{v} . Por consiguiente, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{4} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 &\geq \frac{\alpha}{4} (1 - \bar{c}_v \Delta t) \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
-\frac{\alpha}{4} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 &\geq -\frac{\alpha}{4} (1 + \bar{c}_v \Delta t) \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2.
\end{aligned}$$

Introduciendo estas desigualdades en (2.38) obtenemos la cota inferior para I_3 :

$$\begin{aligned}
I_3 &\geq \frac{\alpha}{2} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 - \frac{\alpha}{2} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
&\quad - \bar{c}_v \alpha \Delta t \left(\left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Finalmente, la desigualdad (2.27) se obtiene de (2.28), (2.37) y (2.41). \square

Lema 2.4.2. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 1.1, 1.5 y además $\Delta t < \min\{\eta, K\}$, siendo η y K las constantes que aparecen, respectivamente, en el Lema 1.5.1 y en el Corolario 1.5.3. Entonces se cumple*

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{f^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + f^n \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n}{2}, \psi - \varphi \right\rangle_{0,\Omega} \\ & \leq \frac{\Delta t}{4\gamma} \left(\|f^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|f^n \circ X_{RK}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\ & \quad + \frac{\gamma}{4\Delta t} \|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n}(\psi - \varphi)\|_{0,2,\Omega}^2, \end{aligned} \quad (2.42)$$

para todo par de funciones $\varphi, \psi \in L^2(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. Esta estimación se obtiene utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (2.8) con $\epsilon = \Delta t/\gamma$. En efecto,

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{f^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + f^n \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n}{2}, \psi - \varphi \right\rangle_{0,\Omega} \\ & \leq \frac{\Delta t}{4\gamma} \|f^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{\gamma}{4\Delta t} \|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}(\psi - \varphi)\|_{0,2,\Omega}^2 \\ & \quad + \frac{\Delta t}{4\gamma} \|f^n \circ X_{RK}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{\gamma}{4\Delta t} \|\sqrt{\det F_{RK}^n}(\psi - \varphi)\|_{0,2,\Omega}^2 \\ & = \frac{\Delta t}{4\gamma} \left(\|f^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|f^n \circ X_{RK}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\ & \quad + \frac{\gamma}{4\Delta t} \|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n}(\psi - \varphi)\|_{0,2,\Omega}^2. \end{aligned}$$

□

Lema 2.4.3. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 1.1 y 1.6 y además $\Delta t < \min\{\eta, 1/(2c), K\}$, siendo η y K las constantes que aparecen, respectivamente, en el Lema 1.5.1 y en el Corolario 1.5.3. Entonces, para toda sucesión $\{\psi^n\}_{n=0}^N \in [L^2(\Gamma^R)]^{N+1}$ y todo entero $q \in \{1, \dots, N\}$ se verifica*

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{q-1} \left\langle \frac{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| g^n \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n}{2}, \psi^{n+1} - \psi^n \right\rangle_{0,\Gamma^R} \\ & \leq \frac{1}{\alpha} \|\sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} g^q \circ X_{RK}^q\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \frac{\alpha}{4} \|\sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} \psi^q\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ & \quad + \frac{1}{4\alpha} \left(\|g^0\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \|\sqrt{|(F_{RK}^1)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^1} g^1 \circ X_{RK}^1\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right) + \frac{\alpha}{2} (1 + \bar{c}_v \Delta t) \|\psi^0\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ & \quad + \frac{\bar{c}_v \Delta t}{\alpha} \sum_{n=0}^q \|\sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} g^n \circ X_{RK}^n\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ & \quad + \bar{c}_v \Delta t \alpha \sum_{n=1}^q \|\sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \psi^n\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ & \quad + \frac{\Delta t}{4\alpha} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \left(\frac{g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} - g^n \circ X_{RK}^n}{\Delta t} \right) \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ & \quad + \frac{\Delta t}{4\alpha} \sum_{n=1}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \left(\frac{g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} - g^n \circ X_{RK}^n}{\Delta t} \right) \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

DEMOSTRACIÓN. El resultado se obtiene a partir de la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{q-1} \left\langle \frac{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| g^n \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n}{2}, \psi^{n+1} - \psi^n \right\rangle_{0, \Gamma^R} \\
&= \frac{1}{2} \langle |(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| g^q \circ X_{RK}^q \det F_{RK}^q, \psi^q \rangle_{0, \Gamma^R} - \frac{1}{2} \langle g^0, \psi^0 \rangle_{0, \Gamma^R} \\
&\quad - \Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \left\langle \frac{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} - |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| g^n \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n}{2\Delta t}, \psi^{n+1} \right\rangle_{0, \Gamma^R} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{q-1} \langle |(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1}, \psi^{n+1} - \psi^n \rangle_{0, \Gamma^R} \\
&= \langle |(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| g^q \circ X_{RK}^q \det F_{RK}^q, \psi^q \rangle_{0, \Gamma^R} - \frac{1}{2} \langle g^0, \psi^0 \rangle_{0, \Gamma^R} \\
&\quad - \frac{1}{2} \langle |(F_{RK}^1)^{-T} \mathbf{m}| g^1 \circ X_{RK}^1 \det F_{RK}^1, \psi^0 \rangle_{0, \Gamma^R} \\
&\quad - \Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \left\langle \frac{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} - |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| g^n \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n}{2\Delta t}, \psi^{n+1} \right\rangle_{0, \Gamma^R} \\
&\quad - \Delta t \sum_{n=1}^{q-1} \left\langle \frac{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} - |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| g^n \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n}{2\Delta t}, \psi^n \right\rangle_{0, \Gamma^R}.
\end{aligned}$$

Concretamente, para el primer término a la derecha de la igualdad obtenemos

$$\begin{aligned}
\left| \langle |(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| g^q \circ X_{RK}^q \det F_{RK}^q, \psi^q \rangle_{0, \Gamma^R} \right| &\leq \frac{1}{\alpha} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} g^q \circ X_{RK}^q \right\|_{0, 2, \Gamma^R}^2 \\
&\quad + \frac{\alpha}{4} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} \psi^q \right\|_{0, 2, \Gamma^R}^2.
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (2.8) con $\epsilon = 2/\alpha$. Análogamente, se deduce

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left| \langle g^0, \psi^0 \rangle_{0, \Gamma^R} + \langle |(F_{RK}^1)^{-T} \mathbf{m}| g^1 \circ X_{RK}^1 \det F_{RK}^1, \psi^0 \rangle_{0, \Gamma^R} \right| \\
&\leq \frac{1}{4\alpha} \left(\|g^0\|_{0, 2, \Gamma^R}^2 + \left\| \sqrt{|(F_{RK}^1)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^1} g^1 \circ X_{RK}^1 \right\|_{0, 2, \Gamma^R}^2 \right) + \frac{\alpha}{2} (1 + \bar{\epsilon}_v \Delta t) \|\psi^0\|_{0, 2, \Gamma^R}^2.
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado (2.39). Por otro lado, teniendo en cuenta (2.40) se deduce

$$\begin{aligned}
& \Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \left\langle \frac{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} - |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| g^n \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n}{2\Delta t}, \psi^{n+1} \right\rangle_{0, \Gamma^R} \\
&= \Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \left\langle |(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} \left(\frac{g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} - g^n \circ X_{RK}^n (1 + O(\Delta t))}{2\Delta t} \right), \psi^{n+1} \right\rangle_{0, \Gamma^R} \\
&= \Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \left\langle |(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} \left(\frac{g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} - g^n \circ X_{RK}^n}{2\Delta t} \right), \psi^{n+1} \right\rangle_{0, \Gamma^R} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{q-1} \langle |(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} O(\Delta t) g^n \circ X_{RK}^n, \psi^{n+1} \rangle_{0, \Gamma^R},
\end{aligned}$$

siendo $O(\Delta t)$ dependiente de \mathbf{v} . Entonces, utilizando (2.39), la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (2.8) se obtiene

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{n=0}^{q-1} \frac{1}{2} \langle |(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} O(\Delta t) g^n \circ X_{RK}^n, \psi^{n+1} \rangle_{0, \Gamma^R} \right| \\
& \leq \frac{\bar{c}_v \Delta t}{\alpha} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} g^n \circ X_{RK}^n \right\|_{0,2, \Gamma^R}^2 \\
& \quad + \bar{c}_v \Delta t \alpha \sum_{n=1}^q \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \psi^n \right\|_{0,2, \Gamma^R}^2,
\end{aligned} \tag{2.44}$$

y también

$$\begin{aligned}
& \left| \Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \left\langle |(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} \left(\frac{g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} - g^n \circ X_{RK}^n}{2\Delta t} \right), \psi^{n+1} \right\rangle_{0, \Gamma^R} \right| \\
& \leq \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \left(\frac{g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} - g^n \circ X_{RK}^n}{\Delta t} \right) \right\|_{0,2, \Gamma^R}^2 \\
& \quad + \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \psi^{n+1} \right\|_{0,2, \Gamma^R}^2 \\
& \leq \frac{\Delta t}{4\alpha} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \left(\frac{g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} - g^n \circ X_{RK}^n}{\Delta t} \right) \right\|_{0,2, \Gamma^R}^2 \\
& \quad + \frac{\Delta t \alpha}{4} \sum_{n=1}^q \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \psi^n \right\|_{0,2, \Gamma^R}^2.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las desigualdades obtenidas se deduce

$$\begin{aligned}
& \left| \Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \left\langle \frac{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} - |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| g^n \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n}{2\Delta t}, \psi^{n+1} \right\rangle_{0, \Gamma^R} \right| \\
& \leq \frac{\bar{c}_v \Delta t}{\alpha} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} g^n \circ X_{RK}^n \right\|_{0,2, \Gamma^R}^2 \\
& \quad + \bar{c}_v \Delta t \alpha \sum_{n=1}^q \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \psi^n \right\|_{0,2, \Gamma^R}^2 \\
& \quad + \frac{\Delta t}{4\alpha} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \left(\frac{g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} - g^n \circ X_{RK}^n}{\Delta t} \right) \right\|_{0,2, \Gamma^R}^2.
\end{aligned}$$

Procediendo de forma análoga se obtiene

$$\begin{aligned}
& \left| \Delta t \sum_{n=1}^{q-1} \left\langle \frac{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} - |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| g^n \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n}{2\Delta t}, \psi^n \right\rangle_{0, \Gamma^R} \right| \\
& \leq \frac{\bar{c}_v \Delta t}{\alpha} \sum_{n=2}^q \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} g^n \circ X_{RK}^n \right\|_{0,2, \Gamma^R}^2 \\
& \quad + \bar{c}_v \Delta t \alpha \sum_{n=1}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \psi^n \right\|_{0,2, \Gamma^R}^2 \\
& \quad + \frac{\Delta t}{4\alpha} \sum_{n=1}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \left(\frac{g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} - g^n \circ X_{RK}^n}{\Delta t} \right) \right\|_{0,2, \Gamma^R}^2
\end{aligned}$$

Entonces, utilizando las desigualdades obtenidas, se deduce el resultado. \square

Teorema 2.4.1. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 y 2.1. Sea $\widehat{\phi_{m,\Delta t}}$ la solución de (2.1) sujeta a la condición inicial $\phi_{m,\Delta t}^0 \in H^1(\Omega)$. Entonces, existen dos constantes positivas, J y D , tales que para $\Delta t < D$, se verifica*

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{\gamma}{4}} \left\| \sqrt{\widehat{\mathcal{S}[\det F_{RK}]}} \mathcal{R}_{\Delta t}[\phi_{m,\Delta t}] \right\|_{l^2(L^2(\Omega))} + \sqrt{\frac{\Lambda}{2}} \left\| B F_{RK}^{-T} \nabla \widehat{\phi_{m,\Delta t}} \sqrt{\det F_{RK}} \right\|_{l^\infty(\mathbf{L}^2(\Omega))} \\
& + \sqrt{\frac{\alpha}{4}} \left\| \sqrt{|F_{RK}^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}} \phi_{m,\Delta t} \right\|_{l^\infty(L^2(\Gamma^R))} \leq J \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{2}} \|B \nabla \phi_{m,\Delta t}^0\|_{0,2,\Omega} + \sqrt{\frac{\alpha}{4}} \|\phi_{m,\Delta t}^0\|_{0,2,\Gamma^R} \right. \\
& \quad + \|\sqrt{\det F_{RK}} f \circ X_{RK}\|_{l^2(L^2(\Omega))} + \|\sqrt{|F_{RK}^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}} g \circ X_{RK}\|_{l^\infty(L^2(\Gamma^R))} \\
& \quad \left. + \left\| \sqrt{\widehat{\mathcal{S}[|F_{RK}^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}]}} \mathcal{R}_{\Delta t}[g \circ X_{RK}] \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} \right). \tag{2.45}
\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. La sucesión $\widehat{\phi_{m,\Delta t}}$ solución de (2.1) satisface

$$\left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\phi_{m,\Delta t}}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle. \tag{2.46}$$

Aplicando el Lema 2.4.1 y el Lema 2.4.2 con $\psi = \phi_{m,\Delta t}^{n+1}$ y $\varphi = \phi_{m,\Delta t}^n$ se sigue

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\Delta t} \left\| \sqrt{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)} (\phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{1}{2} \left\| C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& - \frac{1}{2} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{\alpha}{2} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 - \frac{\alpha}{2} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& \leq \frac{\Delta t}{4\gamma} \left(\|f^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|f^n \circ X_{RK}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
& + \frac{\gamma}{4\Delta t} \|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n} (\phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n)\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \left\langle \frac{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| g^n \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n}{2}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle_{0,\Gamma^R} \\
& + \hat{c} \Delta t \Lambda \left(\|B(F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|B(F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
& + \hat{c} \Delta t \alpha \left(\left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right), \tag{2.47}
\end{aligned}$$

siendo $\hat{c} = \max\{c_A \bar{c}_v / \Lambda, \bar{c}_v\}$. Dado $q \geq 1$ sumamos desde $n = 0$ hasta $n = q - 1$ a ambos lados de la desigualdad (2.47), obteniendo

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\Delta t} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)} (\phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{1}{2} \left\| C \circ X_{RK}^q (F_{RK}^q)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^q \sqrt{\det F_{RK}^q} \right\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{2} \|C \nabla \phi_{m,\Delta t}^0\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{\alpha}{2} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} \phi_{m,\Delta t}^q \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 - \frac{\alpha}{2} \|\phi_{m,\Delta t}^0\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& \leq \frac{\Delta t}{2\gamma} \sum_{n=0}^q \|f^n \circ X_{RK}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{\gamma}{4\Delta t} \sum_{n=0}^{q-1} \|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n} (\phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n)\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \sum_{n=0}^{q-1} \left\langle \frac{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| g^n \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n}{2}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle_{0,\Gamma^R} \\
& + \hat{c} \Delta t \Lambda \left(\|B(F_{RK}^q)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^q \sqrt{\det F_{RK}^q}\|_{0,2,\Omega}^2 + 2 \sum_{n=0}^{q-1} \|B(F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
& + \hat{c} \Delta t \alpha \left(\left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} \phi_{m,\Delta t}^q \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + 2 \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right).
\end{aligned}$$

A partir de esta desigualdad y aplicando el Lema 2.4.3 con $\{\psi^n\}_n = \{\phi_{m,\Delta t}^n\}_n$ se deduce

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\Delta t} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)} (\phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{1}{2} \left\| C \circ X_{RK}^q (F_{RK}^q)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^q \sqrt{\det F_{RK}^q} \right\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{2} \|C \nabla \phi_{m,\Delta t}^0\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{\alpha}{2} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} \phi_{m,\Delta t}^q \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 - \frac{\alpha}{2} \|\phi_{m,\Delta t}^0\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& \leq \frac{\Delta t}{2\gamma} \sum_{n=0}^q \|f^n \circ X_{RK}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{\gamma}{4\Delta t} \sum_{n=0}^{q-1} \|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n} (\phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n)\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{1}{\alpha} \|\sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} g^q \circ X_{RK}^q\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \frac{\alpha}{4} \|\sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} \phi_{m,\Delta t}^q\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& + \frac{1}{4\alpha} \left(\|g^0\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \|\sqrt{|(F_{RK}^1)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^1} g^1 \circ X_{RK}^1\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right) + \frac{\alpha}{2} \|\phi_{m,\Delta t}^0\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& + \frac{\widehat{c}\Delta t}{\alpha} \sum_{n=0}^q \|\sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} g^n \circ X_{RK}^n\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& + \frac{\Delta t}{4\alpha} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \left(\frac{g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} - g^n \circ X_{RK}^n}{\Delta t} \right) \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& + \frac{\Delta t}{4\alpha} \sum_{n=1}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \left(\frac{g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} - g^n \circ X_{RK}^n}{\Delta t} \right) \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& + \widehat{c}\Delta t \Lambda \left(\|B(F_{RK}^q)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^q \sqrt{\det F_{RK}^q}\|_{0,2,\Omega}^2 + 2 \sum_{n=0}^{q-1} \|B(F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
& + \widehat{c}\Delta t \alpha \left(2 \left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} \phi_{m,\Delta t}^q \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + 3 \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right),
\end{aligned}$$

siendo $\widehat{c} = \max\{c_A \bar{c}_v / \Lambda, \bar{c}_v\}$. Introducimos las siguientes notaciones

$$\begin{aligned}
\theta_n^1 &:= \frac{\gamma}{4\Delta t} \sum_{s=0}^{n-1} \left\| \sqrt{\det F_{RK}^{s+1} + \det F_{RK}^s} (\phi_{m,\Delta t}^{s+1} - \phi_{m,\Delta t}^s) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
\theta_n^2 &:= \frac{\Lambda}{2} \left\| B(F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2, \\
\bar{\theta}_n &:= \frac{\alpha}{4} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las Hipótesis 1.3 y 1.4 y la notación introducida, se deduce

$$\begin{aligned}
& \theta_q^1 + (1 - 2\widehat{c}\Delta t)\theta_q^2 + (1 - 8\widehat{c}\Delta t)\bar{\theta}_q \leq 4\widehat{c}\Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \theta_n^2 + 12\widehat{c}\Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \bar{\theta}_n \\
& + \beta \left(\theta_0^2 + \bar{\theta}_0 + \|\sqrt{\det F_{RK}} f \circ X_{RK}\|_{l^2(L^2(\Omega))}^2 + \|\sqrt{|(F_{RK})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}} g \circ X_{RK}\|_{l^\infty(L^2(\Gamma^R))}^2 \right. \\
& \quad \left. + \left\| \sqrt{\mathcal{S}[(F_{RK}^{-T} \mathbf{m}) \det F_{RK}]} \mathcal{R}_{\Delta t}[g \circ X_{RK}] \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))}^2 \right),
\end{aligned}$$

siendo β una constante positiva. Si Δt es suficientemente pequeño podemos aplicar el Lema de Gronwall en su versión discreta (ver [67]) y aplicar el máximo para $q \in \{1, \dots, N\}$. De esta manera se consigue (2.45). \square

Corolario 2.4.1. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 y 2.1. Sea $\widehat{\phi_{m,\Delta t}}$ la solución de (2.1) sujeta a la condición inicial $\phi_{m,\Delta t}^0 \in H^1(\Omega)$. Entonces, existen dos constantes positivas, J y D , tales que para $\Delta t < D$, se verifica*

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\gamma}{4}} \|\mathcal{R}_{\Delta t}[\phi_{m,\Delta t}]\|_{l^2(L^2(\Omega))} + \sqrt{\frac{\Lambda}{2}} \|B \nabla \widehat{\phi_{m,\Delta t}}\|_{l^\infty(L^2(\Omega))} + \sqrt{\frac{\alpha}{4}} \|\widehat{\phi_{m,\Delta t}}\|_{l^\infty(L^2(\Gamma^R))} \\ & \leq J \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{2}} \|B \nabla \phi_{m,\Delta t}^0\|_{0,2,\Omega} + \sqrt{\frac{\alpha}{4}} \|\phi_{m,\Delta t}^0\|_{0,2,\Gamma^R} + \|f \circ \widehat{X_{RK}}\|_{l^2(L^2(\Omega))} + \|g \circ \widehat{X_{RK}}\|_{l^\infty(L^2(\Gamma^R))} \right. \\ & \quad \left. + \|\mathcal{R}_{\Delta t}[\widehat{g \circ X_{RK}}]\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} \right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

DEMOSTRACIÓN. El resultado se deduce teniendo en cuenta los Lemas 1.5.4, 2.2.1 y el Teorema 2.4.1. \square

Observación 2.4.1. *Bajo ciertas hipótesis sobre la aplicación g se pueden obtener acotaciones para*

$$\left\| \mathcal{R}_{\Delta t}[\widehat{g \circ X_{RK}}] \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))}. \quad (2.49)$$

Concretamente, analizamos dos casos:

- Si se cumple que $g^n \circ X_{RK}^n = G(t_n)$, $n = 0, \dots, N$, para una función $G \in C^1(L^2(\Gamma^R))$. Entonces, aplicando la regla de Barrow y la desigualdad de Holder se obtiene una cota para (2.49). En efecto:

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{R}_{\Delta t}[\widehat{g \circ X_{RK}}] \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))}^2 &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left\| \frac{g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} - g^n \circ X_{RK}^n}{\Delta t} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ &\leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\Delta t} \left\| \frac{\partial G}{\partial t} \right\|_{L^2((t_n, t_{n+1}); L^2(\Gamma^R))}^2 = \left\| \frac{\partial G}{\partial t} \right\|_{L^2(L^2(\Gamma^R))}^2. \end{aligned}$$

- Si se cumple que

$$\|g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} - g^n \circ X_{RK}^n\|_{0,2,\Gamma^R} \leq \Delta t \|\zeta^n\|_{0,2,\Gamma^R} \quad n = 0, \dots, N-1,$$

para una sucesión $\{\zeta^n\}_{n=0}^N \in l^\infty(L^2(\Gamma^R))$. Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{R}_{\Delta t}[\widehat{g \circ X_{RK}}] \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))}^2 &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left\| \frac{g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} - g^n \circ X_{RK}^n}{\Delta t} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\zeta^n\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ &\leq T \left\| \widehat{\zeta} \right\|_{l^\infty(L^2(\Gamma^R))}^2. \end{aligned}$$

Observación 2.4.2. *Nótese que la constante \hat{c} que aparece en el Lema 2.4.1 pueden tender a infinito conforme Λ tiene a cero y, como consecuencia, también pueden tender a infinito la constante J del Teorema 2.4.1. Este inconveniente se puede solventar restringiendo el espacio del coeficiente (tensorial) de difusión. En efecto, dado $\nu > 0$, introducimos el conjunto*

$$\mathcal{C}_\nu := \left\{ A : \mathcal{O}^\delta \longrightarrow \text{Lin}, \text{ } A \text{ verifica la Hipótesis 1.4 y } \frac{c_A}{\Lambda} \leq \nu \right\}.$$

Recordemos que Λ es una cota inferior uniforme de los autovalores de A_{n_1} y c_A está definida en (2.2). Entonces, tomando A en este conjunto las constantes \hat{c} y J se mantienen acotadas. En particular, si $A = \varepsilon B \in \mathcal{C}_1$, la constante \hat{c} y, como consecuencia, también la constante J están acotadas cuando ε tiende a cero. Por otra parte, las desigualdades (2.9) y (2.22) son válidas cuando $A = \Theta$, y también, adaptando las constantes y eliminando los términos correspondientes a la difusión, serían válidas las desigualdades (2.27) y (2.45) para el caso del problema de transporte.

Capítulo 3

Estimación de error para la semidiscretización temporal

3.1. Introducción

Existe numerosa bibliografía que estudia matemáticamente los métodos de características semi-Lagrangianos; sin embargo, es escasa la que desarrolla un análisis riguroso para métodos enteramente Lagrangianos.

En [63] y [77] se estudia el método clásico de características, y se prueba convergencia de orden uno en tiempo. En [68] se analiza el método (1.63) para $\theta = 1/2$ deduciendo convergencia de orden $O(\Delta t^2)$ en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ y orden $O(\Delta t^{3/2})$ en norma $l^\infty(H^1(\Omega))$, con constantes que dependen del coeficiente de difusión. En [12] se deducen estimaciones de error para el método clásico de características con constantes que se mantienen acotadas en el límite hiperbólico. En [29] se analizan dos métodos, uno Lagrangiano y otro semi-Lagrangiano para problemas de convección-difusión. Se obtienen estimaciones de error expresadas en términos de operadores de proyección con constantes independientes de la difusión cuando la velocidad se calcula exactamente. Sin embargo, en el análisis teórico se consideran las características calculadas exactamente. Nótese que en este trabajo analizamos un método Lagrangiano en el que las características y sus gradientes se aproximan utilizando un método de Runge-Kutta de segundo orden.

Generalmente, en el análisis se consideran campos de velocidades que se anulan sobre la frontera y coeficiente de difusión correspondiente al clásico laplaciano. En este trabajo consideramos campos de velocidades cualquiera y coeficiente de difusión variable en espacio y que puede ser degenerado (incluso nulo). En esta sección obtenemos dos estimaciones de error temporales para el método Lagrangiano (2.1): una de orden $O(\Delta t^2)$ en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$, y otra de orden $O(\Delta t^2)$ para los gradientes en norma $l^\infty(\mathbf{L}^2(\Omega))$. Además, la estimación del error en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ involucra constantes que se mantienen acotadas cuando el coeficiente de difusión tiende a cero, válidas incluso para el problema de transporte (difusión nula). Los pasos que seguiremos para obtener estas estimaciones son los siguientes:

- En primer lugar, obtenemos nuevos resultados de estabilidad para un problema con un segundo miembro más general.
- En segundo lugar, probamos resultados preliminares necesarios para la obtención de las estimaciones.
- En tercer lugar, probamos la convergencia del método en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ con orden $O(\Delta t^2)$ y con constantes que se mantienen acotadas cuando el coeficiente de difusión tiende a cero. También se consigue probar convergencia para los gradientes del error en norma $l^\infty(\mathbf{L}^2(\Omega))$ con orden $O(\Delta t^2)$.

3.2. Otros resultados de estabilidad para el problema semidiscretizado

Para obtener las estimaciones de error, será necesario estudiar la estabilidad del método para un segundo miembro más general. En efecto, como veremos más adelante la diferencia entre la solución discreta de (2.1) y la solución del problema continuo verifica un problema análogo a (2.1) pero con un segundo miembro más general. Concretamente, consideramos el siguiente problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } \phi_{m,\Delta t}^0 \in H^1(\Omega), \text{ encontrar } \widehat{\phi_{m,\Delta t}} = \{\phi_{m,\Delta t}^n\}_{n=1}^N \in [\mathcal{W}]^N \text{ tal que} \\ \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}[\widehat{\phi_{m,\Delta t}}], \psi \right\rangle = \left\langle \mathcal{H}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle \\ \text{para todo } \psi \in \mathcal{W} \text{ y } n = 0, \dots, N-1, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

con

$$\left\langle \mathcal{H}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle = \langle S^{n+1}, \psi \rangle_{0,\Omega} + \langle G^{n+1}, \psi \rangle_{0,\Gamma^R}, \quad (3.2)$$

donde $S^{n+1} \in L^2(\Omega)$ y $G^{n+1} \in L^2(\Gamma^R)$.

Hipótesis 3.1. Para cada $1 \leq n \leq N$ la función $S^n \in L^2(\Omega)$ y $G^n \in L^2(\Gamma^R)$.

3.2.1. Estabilidad en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ para un segundo miembro general

Antes de establecer el primer resultado de estabilidad para el problema semidiscreto (3.1) enunciamos y probamos los siguientes lemas.

Lema 3.2.1. Asumimos que se verifican las Hipótesis 1.1 y 3.1, y además $\Delta t < \min\{\eta, \frac{1}{2c}, K\}$, siendo c la constante definida en (1.123) y η y K las constantes que aparecen, respectivamente, en el Lema 1.5.1 y en el Corolario 1.5.3. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} & \langle S^{n+1}, \psi + \varphi \rangle_{0,\Omega} + \langle G^{n+1}, \psi + \varphi \rangle_{0,\Gamma^R} \leq 2c_s \|S^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 \\ & + \frac{1}{2} \left(\|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \psi\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\sqrt{\det F_{RK}^n} \varphi\|_{0,2,\Omega}^2 \right) + \frac{8c_g}{\alpha} \|G^{n+1}\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ & + \frac{\alpha}{32} \|\sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} (\varphi + \psi)\|_{0,2,\Gamma^R}^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

para todo $\varphi, \psi \in H^1(\Omega)$ y siendo $c_s = 1/(2\tilde{c}_1)$ y $c_g = 1/(2\tilde{c}_1\tilde{c}_2)$, donde \tilde{c}_1 y \tilde{c}_2 son las constantes que aparecen en el Lema 1.5.4, y $\alpha > 0$ es la constante que aparece en (1.8).

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, dados $\psi, \varphi \in H^1(\Omega)$ introducimos la siguiente notación

$$I_1 = \langle S^{n+1}, \psi + \varphi \rangle_{0,\Omega}, \quad I_2 = \langle G^{n+1}, \psi + \varphi \rangle_{0,\Gamma^R}.$$

La cota para I_1 se obtiene aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (2.8) y el Lema 1.5.4. En efecto,

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\langle S^{n+1} \sqrt{\det (F_{RK}^{n+1})^{-1}}, \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \psi \right\rangle_{0,\Omega} + \left\langle S^{n+1} \sqrt{\det (F_{RK}^n)^{-1}}, \sqrt{\det F_{RK}^n} \varphi \right\rangle_{0,\Omega} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\|S^{n+1} \sqrt{\det (F_{RK}^{n+1})^{-1}}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|S^{n+1} \sqrt{\det (F_{RK}^n)^{-1}}\|_{0,2,\Omega}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \psi\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\sqrt{\det F_{RK}^n} \varphi\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\tilde{c}_1} \|S^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \psi\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\sqrt{\det F_{RK}^n} \varphi\|_{0,2,\Omega}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

La cota para I_2 se obtiene utilizando también la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (2.8) con $\epsilon = \alpha/4$ y el Lema 1.5.4. Concretamente, se tiene

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{G^{n+1}}{\sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}}}, \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} (\psi + \varphi) \right\rangle_{0, \Gamma^R} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\langle \frac{G^{n+1}}{\sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n}}, \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} (\psi + \varphi) \right\rangle_{0, \Gamma^R} \\
&\leq \frac{2}{\alpha} \left(\frac{2}{\tilde{c}_1 \tilde{c}_2} \|G^{n+1}\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right) + \frac{\alpha}{32} \|\sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} (\varphi + \psi)\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
&\quad + \frac{\alpha}{32} \|\sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} (\varphi + \psi)\|_{0,2,\Gamma^R}^2.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Finalmente, utilizando las desigualdades (3.4) y (3.5) se deduce el resultado. \square

Teorema 3.2.1. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 1.1, 1.3, 1.4, 2.1, 3.1. Sea $\widehat{\phi_{m,\Delta t}}$ la solución de (3.1) sujeta a la condición inicial $\phi_{m,\Delta t}^0 \in H^1(\Omega)$ y $\alpha > 0$ la constante que aparece en (1.8). Entonces, existen dos constantes positivas, J y D , independientes del coeficiente tensorial de difusión, tales que para $\Delta t < D$, se verifica*

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\gamma} \|\sqrt{\det F_{RK}} \widehat{\phi_{m,\Delta t}}\|_{l^\infty(L^2(\Omega))} + \sqrt{\frac{\Lambda}{4}} \left\| B F_{RK}^{-T} \mathcal{S}[\nabla \widehat{\phi_{m,\Delta t}}] \sqrt{\det F_{RK}} \right\|_{l^2(L^2(\Omega))} \\
&+ \sqrt{\frac{\alpha}{8}} \left\| \sqrt{\mathcal{S} \left[|F_{RK}^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK} \right] \mathcal{S}[\phi_{m,\Delta t}]} \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} \leq J \left(\sqrt{\gamma} \|\phi_{m,\Delta t}^0\|_{0,2,\Omega} \right. \\
&\quad \left. + \|\widehat{S}\|_{l^2(L^2(\Omega))} + \|\widehat{G}\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} \right).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde $\widehat{S} = \{S^n\}_{n=1}^N$, $\widehat{G} = \{G^n\}_{n=1}^N$.

DEMOSTRACIÓN. La sucesión $\widehat{\phi_{m,\Delta t}} = \{\phi_{m,\Delta t}^n\}_{n=1}^N$, solución de (3.1), verifica

$$\left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} [\widehat{\phi_{m,\Delta t}}], \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle = \left\langle \mathcal{H}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle.$$

En primer lugar, aplicando el Lema 2.3.1 se deduce la siguiente cota inferior para este término

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\phi_{m,\Delta t}}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle \\
&\geq \frac{1}{\Delta t} \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{\Delta t} \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4} \left\| C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \left(\nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \left(\nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\quad + \frac{\alpha}{4} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \left(\phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \right) \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
&\quad - \widehat{c} \gamma \left(\|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\sqrt{\det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2 \right)
\end{aligned}$$

siendo $\hat{c} = \max \{\rho_{1,\infty}(c_v + \bar{c}_v \Delta t)/\gamma\}$. En segundo lugar, aplicando el Lema 3.2.1 con $\psi = \phi_{m,\Delta t}^{n+1}$ y $\varphi = \phi_{m,\Delta t}^n$, se consigue la siguiente cota superior

$$\begin{aligned} \langle S^{n+1}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \rangle_{0,\Omega} + \langle G^{n+1}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n \rangle_{0,\Gamma^R} &\leq 2c_s \|S^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{8c_g}{\alpha} \|G^{n+1}\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\|\sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\sqrt{\det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\ &\quad + \frac{\alpha}{32} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} (\phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n) \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2. \end{aligned}$$

Considerando estas dos estimaciones, obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t} \left\| \sqrt{\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \right\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{\Delta t} \left\| \sqrt{\rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &+ \frac{1}{4} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \left(\nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &+ \frac{\alpha}{8} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} (\phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n) \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ &\leq 2c_s \|S^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{8c_g}{\alpha} \|G^{n+1}\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \hat{c}\gamma \left(\left\| \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \left\| \sqrt{\det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

con $\hat{c} = \max \{1/\gamma, 2\rho_{1,\infty}(c_v + \bar{c}_v \Delta t)/\gamma\}$. Dado $q \geq 1$ sumamos desde $n = 0$ hasta $n = q - 1$ a ambos lados de la desigualdad (3.7) multiplicada por Δt . Obtenemos

$$\begin{aligned} &\left\| \sqrt{\rho \circ X_{RK}^q \det F_{RK}^q} \phi_{m,\Delta t}^q \right\|_{0,2,\Omega}^2 - \left\| \sqrt{\rho} \phi_{m,\Delta t}^0 \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &+ \frac{\Delta t}{4} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \left(\nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &+ \frac{\alpha \Delta t}{8} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} (\phi_{m,\Delta t}^{n+1} + \phi_{m,\Delta t}^n) \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ &\leq 2c_s \sum_{n=1}^q \Delta t \|S^n\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{8c_g}{\alpha} \sum_{n=1}^q \Delta t \|G^n\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \hat{c}\gamma \Delta t \left\| \sqrt{\det F_{RK}^q} \phi_{m,\Delta t}^q \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &\quad + 2\hat{c}\gamma \Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{\det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Introducimos las siguientes notaciones

$$\begin{aligned} \theta_n^1 &:= \gamma \left\| \sqrt{\det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2, \\ \theta_n^2 &:= \frac{\Lambda}{4} \sum_{s=0}^{n-1} \Delta t \left\| B(F_{RK}^s)^{-T} \left(\nabla \phi_{m,\Delta t}^{s+1} + \nabla \phi_{m,\Delta t}^s \right) \sqrt{\det F_{RK}^s} \right\|_{0,2,\Omega}^2, \\ \bar{\theta}_n &:= \frac{\alpha}{8} \sum_{s=0}^{n-1} \Delta t \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{s+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{s+1} + |(F_{RK}^s)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^s} (\phi_{m,\Delta t}^{s+1} + \phi_{m,\Delta t}^s) \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2, \end{aligned}$$

siendo $n = 0, \dots, N$. Teniendo en cuenta las Hipótesis 1.3 y 1.4 y la notación introducida, se deduce

$$(1 - \hat{c}\Delta t) \theta_q^1 + \theta_q^2 + \bar{\theta}_q \leq 2\hat{c}\Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \theta_n^1 + \beta \left(\theta_0^1 + \|\hat{S}\|_{l^2(L^2(\Omega))}^2 + \|\hat{G}\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))}^2 \right),$$

siendo β una costante positiva. Si Δt es suficientemente pequeño podemos aplicar el Lema de Gronwall en su versión discreta (ver [67]) y aplicar el máximo para $q \in \{1, \dots, N\}$. De esta manera se consigue

(3.6). □

3.2.2. Estabilidad en norma $l^\infty(H^1(\Omega))$ para un segundo miembro general

A continuación enunciamos y demostramos dos lemas que utilizaremos para probar el segundo resultado de estabilidad dado en el Teorema 3.2.2.

Lema 3.2.2. *Asumimos que se verifican las Hipótesis 1.1 y 3.1, y además $\Delta t < \min\{\eta, K\}$, siendo η y K las constantes que aparecen, respectivamente, en el Lema 1.5.1 y en el Corolario 1.5.3. Entonces se verifica*

$$\langle S^{n+1}, \psi - \varphi \rangle_{0,\Omega} \leq \frac{4c_s \Delta t}{\gamma} \|S^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{\gamma}{16\Delta t} \left\| \sqrt{\det F_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n} (\psi - \varphi) \right\|_{0,2,\Omega}^2, \quad (3.9)$$

para todo $\varphi, \psi \in L^2(\Omega)$ y siendo c_s la constante introducida en el Lema 3.2.1.

DEMOSTRACIÓN. El resultado se obtiene utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (2.8) con $\epsilon = 8\Delta t/\gamma$ y teniendo en cuenta el Lema 1.5.4. En efecto:

$$\begin{aligned} \langle S^{n+1}, \psi - \varphi \rangle_{0,\Omega} &= \left\langle \frac{S^{n+1}}{\sqrt{\det F_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n}}, \sqrt{\det F_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n} (\psi - \varphi) \right\rangle_{0,\Omega} \\ &\leq \frac{4\Delta t}{\gamma} \left\| \frac{S^{n+1}}{\sqrt{\det F_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{\gamma}{16\Delta t} \left\| \sqrt{\det F_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n} (\psi - \varphi) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &\leq \frac{4c_s \Delta t}{\gamma} \|S^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{\gamma}{16\Delta t} \left\| \sqrt{\det F_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n} (\psi - \varphi) \right\|_{0,2,\Omega}^2. \end{aligned}$$

□

Lema 3.2.3. *Supongamos que se cumplen las Hipótesis 1.1 y 3.1, y además $\Delta t < \min\{\eta, \frac{1}{2c}, K\}$. Entonces, para toda sucesión $\{\psi^n\}_{n=0}^N \in [L^2(\Gamma^R)]^{N+1}$ y todo entero $q \in \{1, \dots, N\}$ se verifica la siguiente desigualdad*

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{q-1} \langle G^{n+1}, \psi^{n+1} - \psi^n \rangle_{0,\Gamma^R} \right| &\leq \frac{8c_g}{\alpha} \|G^q\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \frac{\alpha}{16} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} \psi^q \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \frac{1}{2\alpha} \|G^1\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ &+ \frac{\alpha}{2} \|\psi^0\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \frac{\Delta t c_g}{\alpha} \sum_{n=1}^{q-1} \left\| \frac{G^{n+1} - G^n}{\Delta t} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \frac{\Delta t \alpha}{2} \sum_{n=1}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \psi^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2, \quad (3.10) \end{aligned}$$

siendo c_g la constante introducida en el Lema 3.2.1.

DEMOSTRACIÓN. El resultado se obtiene a partir de la siguiente igualdad

$$\sum_{n=0}^{q-1} \langle G^{n+1}, \psi^{n+1} - \psi^n \rangle_{0,\Gamma^R} = \langle G^q, \psi^q \rangle_{0,\Gamma^R} - \langle G^1, \psi^0 \rangle_{0,\Gamma^R} - \Delta t \sum_{n=1}^{q-1} \left\langle \frac{G^{n+1} - G^n}{\Delta t}, \psi^n \right\rangle_{0,\Gamma^R}.$$

Concretamente, para los dos primeros términos a la derecha de la igualdad utilizamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (2.8), obteniendo:

$$\begin{aligned}
\langle G^q, \psi^q \rangle_{0, \Gamma^R} &= \left\langle \frac{G^q}{\sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q}}, \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} \psi^q \right\rangle_{0, \Gamma^R} \\
&\leq \frac{4}{\alpha} \left\| \frac{G^q}{\sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q}} \right\|_{0, 2, \Gamma^R}^2 + \frac{\alpha}{16} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} \psi^q \right\|_{0, 2, \Gamma^R}^2 \\
&\leq \frac{8c_g}{\alpha} \|G^q\|_{0, 2, \Gamma^R}^2 + \frac{\alpha}{16} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} \psi^q \right\|_{0, 2, \Gamma^R}^2, \tag{3.11}
\end{aligned}$$

$$\langle G^1, \psi^0 \rangle_{0, \Gamma^R} \leq \frac{1}{2\alpha} \|G^1\|_{0, 2, \Gamma^R}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\psi^0\|_{0, 2, \Gamma^R}^2, \tag{3.12}$$

donde hemos utilizado el Lema 1.5.4 y la notación introducida en el Lema 3.2.1.

Para el tercer término razonamos de manera análoga, deduciendo

$$\begin{aligned}
&\Delta t \left| \sum_{n=1}^{q-1} \left\langle \frac{G^{n+1} - G^n}{\Delta t}, \psi^n \right\rangle_{0, \Gamma^R} \right| \\
&\leq \Delta t \sum_{n=1}^{q-1} \left\| \frac{G^{n+1} - G^n}{\Delta t \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n}} \right\|_{0, 2, \Gamma^R} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \psi^n \right\|_{0, 2, \Gamma^R} \\
&\leq \frac{\Delta t c_g}{\alpha} \sum_{n=1}^{q-1} \left\| \frac{G^{n+1} - G^n}{\Delta t} \right\|_{0, 2, \Gamma^R}^2 + \frac{\Delta t \alpha}{2} \sum_{n=1}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \psi^n \right\|_{0, 2, \Gamma^R}^2. \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Entonces, considerando las desigualdades (3.11), (3.12) y (3.13) se deduce (3.10). \square

Teorema 3.2.2. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 1.1, 1.3, 1.4, 2.1, 3.1. Sea $\widehat{\phi_{m, \Delta t}}$ la solución de (3.1) sujeta a la condición inicial $\phi_{m, \Delta t}^0 \in H^1(\Omega)$ y $\alpha > 0$ la constante que aparece en (1.8). Entonces, existen dos constantes positivas, J y D , tales que para $\Delta t < D$, se verifica*

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{\gamma}{4}} \left\| \sqrt{\widehat{\mathcal{S}[\det F_{RK}]}} \mathcal{R}_{\Delta t}[\phi_{m, \Delta t}] \right\|_{l^2(L^2(\Omega))} + \sqrt{\frac{\Lambda}{2}} \left\| B(F_{RK})^{-T} \nabla \widehat{\phi_{m, \Delta t}} \sqrt{\det F_{RK}} \right\|_{l^\infty(\mathbf{L}^2(\Omega))} \\
&+ \sqrt{\frac{\alpha}{4}} \left\| \sqrt{|(F_{RK})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}} \widehat{\phi_{m, \Delta t}} \right\|_{l^\infty(L^2(\Gamma^R))} \leq J \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{2}} \|B \nabla \phi_{m, \Delta t}^0\|_{0, 2, \Omega} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{\alpha}{4}} \|\phi_{m, \Delta t}^0\|_{0, 2, \Gamma^R} + \|\widehat{S}\|_{l^2(L^2(\Omega))} + \|\widehat{G}\|_{l^\infty(L^2(\Gamma^R))} + \|\widehat{\mathcal{R}_{\Delta t}[G]}\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} \right). \tag{3.14}
\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. La sucesión $\widehat{\phi_{m, \Delta t}} = \{\phi_{m, \Delta t}^n\}_{n=1}^N$, solución de (3.1), verifica

$$\left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}[\widehat{\phi_{m, \Delta t}}], \phi_{m, \Delta t}^{n+1} - \phi_{m, \Delta t}^n \right\rangle = \left\langle \mathcal{H}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}, \phi_{m, \Delta t}^{n+1} - \phi_{m, \Delta t}^n \right\rangle.$$

En primer lugar, aplicando el Lema 2.4.1 se deduce la siguiente cota inferior para este término

$$\begin{aligned}
& \left\langle \widehat{\mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \phi_{m,\Delta t}}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle \\
& \geq \frac{1}{2\Delta t} \left\| \sqrt{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)} (\phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{1}{2} \left\| C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& - \frac{1}{2} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{\alpha}{2} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 - \frac{\alpha}{2} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& - \widehat{c} \Delta t \Lambda \left(\|B(F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|B(F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
& - \widehat{c} \Delta t \alpha \left(\left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right),
\end{aligned}$$

siendo $\widehat{c} = \max\{c_A \bar{c}_v / \Lambda, \bar{c}_v\}$. En segundo lugar, aplicando el Lema 3.2.2 con $\psi = \phi_{m,\Delta t}^{n+1}$ y $\varphi = \phi_{m,\Delta t}^n$, se consigue la siguiente cota superior

$$\begin{aligned}
& \langle S^{n+1}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n \rangle_{0,\Omega} + \langle G^{n+1}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n \rangle_{0,\Gamma^R} \leq \frac{4c_s \Delta t}{\gamma} \|S^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{\gamma}{16\Delta t} \left\| \sqrt{\det F_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n} (\phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n) \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \left\langle G^{n+1}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle_{0,\Gamma^R}.
\end{aligned}$$

Considerando estas dos estimaciones, obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\Delta t} \left\| \sqrt{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)} (\phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{1}{2} \left\| C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{2} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{\alpha}{2} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 - \frac{\alpha}{2} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& \leq \widehat{c} \Delta t \Lambda \left(\|B(F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|B(F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
& + \widehat{c} \Delta t \alpha \left(\left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} \phi_{m,\Delta t}^{n+1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right) \\
& + \frac{4c_s \Delta t}{\gamma} \|S^{n+1}\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{\gamma}{16\Delta t} \left\| \sqrt{\det F_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n} (\phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \left\langle G^{n+1}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle_{0,\Gamma^R}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Dado $q \geq 1$ sumamos desde $n = 0$ hasta $n = q - 1$ a ambos lados de la desigualdad (3.15) obteniendo

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\Delta t} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)} (\phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{1}{2} \left\| C \circ X_{RK}^q (F_{RK}^q)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^q \sqrt{\det F_{RK}^q} \right\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{2} \|C \nabla \phi_{m,\Delta t}^0\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{\alpha}{2} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} \phi_{m,\Delta t}^q \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 - \frac{\alpha}{2} \|\phi_{m,\Delta t}^0\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& \leq \frac{4c_s}{\gamma} \sum_{n=1}^q \Delta t \|S^n\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{\gamma}{16\Delta t} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{\det F_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n} (\phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \sum_{n=0}^{q-1} \left\langle G^{n+1}, \phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n \right\rangle_{0,\Gamma^R} + \hat{c} \Delta t \Lambda \left(\|B(F_{RK}^q)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^q \sqrt{\det F_{RK}^q}\|_{0,2,\Omega}^2 \right. \\
& + 2 \sum_{n=0}^{q-1} \|B(F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 \left. \right) + \hat{c} \Delta t \alpha \left(\left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} \phi_{m,\Delta t}^q \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right. \\
& + 2 \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \left. \right). \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Partiendo de esta desigualdad y aplicando el Lema 3.2.3 con $\hat{\psi} = \widehat{\phi_{m,\Delta t}}$ se deduce

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\Delta t} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)} (\phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{1}{2} \left\| C \circ X_{RK}^q (F_{RK}^q)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^q \sqrt{\det F_{RK}^q} \right\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{2} \|C \nabla \phi_{m,\Delta t}^0\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{\alpha}{4} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} \phi_{m,\Delta t}^q \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 - \frac{\alpha}{2} \|\phi_{m,\Delta t}^0\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& \leq \frac{4c_s}{\gamma} \sum_{n=1}^q \Delta t \|S^n\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{\gamma}{16\Delta t} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{\det F_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n} (\phi_{m,\Delta t}^{n+1} - \phi_{m,\Delta t}^n) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{8c_g}{\alpha} \|G^q\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \frac{1}{2\alpha} \|G^1\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\phi_{m,\Delta t}^0\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \frac{\Delta t c_g}{\alpha} \sum_{n=1}^{q-1} \left\| \frac{G^{n+1} - G^n}{\Delta t} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& + \hat{c} \Delta t \Lambda \left(\|B(F_{RK}^q)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^q \sqrt{\det F_{RK}^q}\|_{0,2,\Omega}^2 + 2 \sum_{n=0}^{q-1} \|B(F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
& + \hat{c} \Delta t \alpha \left(\left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} \phi_{m,\Delta t}^q \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \frac{5}{2} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right). \tag{3.17}
\end{aligned}$$

siendo $\hat{c} = \max \{c_A \bar{c}_v / \Lambda, \bar{c}_v\}$. Introducimos las siguientes notaciones

$$\begin{aligned}
\theta_n^1 &:= \frac{\gamma}{4\Delta t} \sum_{s=0}^{n-1} \left\| \sqrt{\det F_{RK}^{s+1} + \det F_{RK}^s} (\phi_{m,\Delta t}^{s+1} - \phi_{m,\Delta t}^s) \right\|_{0,2,\Omega}^2, \\
\theta_n^2 &:= \frac{\Lambda}{2} \left\| B(F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m,\Delta t}^n \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2, \\
\bar{\theta}_n &:= \frac{\alpha}{4} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \phi_{m,\Delta t}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las Hipótesis 1.3 y 1.4 y la notación introducida, se tiene

$$\begin{aligned} \theta_q^1 + (1 - 2\hat{c}\Delta t)\theta_q^2 + (1 - 4\hat{c}\Delta t)\bar{\theta}_q &\leq 4\hat{c}\Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \theta_n^2 + 10\hat{c}\Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \bar{\theta}_n \\ &+ \beta \left(\theta_0^2 + \bar{\theta}_0 + \|\hat{S}\|_{l^2(L^2(\Omega))}^2 + \|\hat{G}\|_{l^\infty(L^2(\Gamma^R))}^2 + \left\| \widehat{\mathcal{R}_{\Delta t}[G]} \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

siendo β una constante positiva. Si Δt es suficientemente pequeño podemos aplicar el Lema de Gronwall en su versión discreta (ver [67]) y aplicar el máximo para $q \in \{1, \dots, N\}$. De esta manera se consigue (3.14). \square

Observación 3.2.1. *Bajo ciertas hipótesis sobre la sucesión $\{G^n\}_{n=1}^N \in [L^2(\Gamma^R)]^N$ se pueden obtener acotaciones para*

$$\left\| \widehat{\mathcal{R}_{\Delta t}[G]} \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))}. \quad (3.19)$$

Concretamente, analizamos dos casos:

- Si se cumple que $G^n = G(t_n)$, $n = 0, \dots, N$, para una función $G \in C^1(L^2(\Gamma^R))$. Entonces, aplicando la regla de Barrow y la desigualdad de Holder se obtiene una cota para (3.19). En efecto:

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\mathcal{R}_{\Delta t}[G]} \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))}^2 &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left\| \frac{G^{n+1} - G^n}{\Delta t} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ &\leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\Delta t} \left\| \frac{\partial G}{\partial t} \right\|_{L^2((t_n, t_{n+1}); L^2(\Gamma^R))}^2 = \left\| \frac{\partial G}{\partial t} \right\|_{L^2(L^2(\Gamma^R))}^2. \end{aligned}$$

- Si se cumple que

$$\|G^{n+1} - G^n\|_{0,2,\Gamma^R} \leq \Delta t \|\zeta^n\|_{0,2,\Gamma^R} \quad n = 1, \dots, N-1,$$

para una sucesión $\{\zeta^n\}_{n=0}^N \in l^\infty(L^2(\Gamma^R))$. Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\mathcal{R}_{\Delta t}[G]} \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))}^2 &= \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \left\| \frac{G^{n+1} - G^n}{\Delta t} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \leq \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \|\zeta^n\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ &\leq T \left\| \hat{\zeta} \right\|_{l^\infty(L^2(\Gamma^R))}^2. \end{aligned}$$

3.3. Estimación de error para el problema semidiscretizado

El objetivo de esta sección es obtener estimaciones de la diferencia entre la *solución discreta* de (2.1), $\widehat{\phi_{m,\Delta t}} := \{\phi_{m,\Delta t}^n\}_{n=0}^N$, y la solución exacta del problema continuo, $\widehat{\phi_m} := \{\phi_m^n\}_{n=0}^N$. Estas estimaciones se establecen en los Teorema 3.3.1 y 3.3.2 asumiendo regularidad adicional de la solución y de los datos del problema.

En primer lugar, fijado $\tau = 0$, evaluamos la ecuación (1.56) en los tiempos intermedios de la discretización, $t_{n+\frac{1}{2}}$, con $0 \leq n \leq N-1$. Entonces, la solución exacta verifica

$$\left\langle \mathcal{L}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\phi_m}, \psi \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle \quad \forall \psi \in H_{\Gamma^D}^1(\Omega), \quad (3.20)$$

donde $\mathcal{L}^{n+\frac{1}{2}}\widehat{\phi}_m \in (H^1(\Omega))'$ y $\mathcal{F}^{n+\frac{1}{2}} \in (H^1(\Omega))'$ se definen como sigue

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{L}^{n+\frac{1}{2}}\widehat{\phi}_m, \psi \right\rangle &:= \left\langle \rho \circ X_e^{n+\frac{1}{2}} \det F^{n+\frac{1}{2}} \left(\dot{\phi}_m \right)^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle_{0,\Omega} \\ &\quad + \left\langle \det F^{n+\frac{1}{2}} \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-1} A \circ X_e^{n+\frac{1}{2}} \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-T} \nabla \phi_m^{n+\frac{1}{2}}, \nabla \psi \right\rangle_{0,\Omega} \\ &\quad + \alpha \left\langle \det F^{n+\frac{1}{2}} \left| \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-T} \mathbf{m} \right| \phi_m^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle_{0,\Gamma^R}, \\ \left\langle \mathcal{F}^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle &:= \left\langle \det F^{n+\frac{1}{2}} f^{n+\frac{1}{2}} \circ X_e^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle_{0,\Omega} \\ &\quad + \left\langle \det F^{n+\frac{1}{2}} \left| \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-T} \mathbf{m} \right| g^{n+\frac{1}{2}} \circ X_e^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle_{0,\Gamma^R}, \end{aligned}$$

para $\psi \in H^1(\Omega)$.

La estimación de error temporal en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ se enuncia en el Teorema 3.3.1, y se demuestra a partir del Teorema 3.2.1 y de los Lemas 3.3.14 y 3.3.15. La estimación para los gradientes del error temporal en norma $l^\infty(\mathbf{L}^2(\Omega))$ se enuncia en el Teorema 3.3.2, cuya demostración se basa en el Teorema 3.2.2 y en los Lemas 3.3.14 y 3.3.15. En adelante, denotaremos por ξ , \mathbf{u} y Ψ un campo escalar, vectorial y tensorial, respectivamente. Además, $C(a, b, \dots, c)$ denotará una constante positiva genérica asociada a los datos que aparecen entre paréntesis y que puede ser distinta en cada aparición.

Lema 3.3.1. *Asumimos que se verifica la Hipótesis 1.1, $X_e \in \mathbf{C}^3(\overline{\Omega} \times [0, T])$ y $\Delta t < \eta$, siendo η la constante que aparece en el Lema 1.5.1. Sea $\mathbf{u}^n : \overline{\Omega} \rightarrow \mathcal{V}$ definida para cada $n \in \{0, \dots, N\}$ por*

$$\mathbf{u}^n(p) = X_e^n(p) - X_{RK}^n(p), \quad (3.21)$$

para todo $p \in \overline{\Omega}$. Entonces $\mathbf{u}^n \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ y se verifica

$$\|\mathbf{u}^n\|_{0,\infty,\Omega} \leq C(\mathbf{v}, T) \Delta t^2, \quad (3.22)$$

para cada $n \in \{0, \dots, N\}$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, utilizando el desarrollo de Taylor de tercer orden con el resto en forma integral de la función $X_e(p, t)$ respecto de la variable temporal, entorno a $t_{n+\frac{1}{2}}$, y evaluando en t_n y t_{n+1} se obtiene

$$\begin{aligned} X_e^n(p) &= X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) + \frac{\Delta t^2}{8} \dot{\mathbf{v}}^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \ddot{\mathbf{v}}(X_e(p, s), s) (t_n - s)^2 ds, \\ X_e^{n+1}(p) &= X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) + \frac{\Delta t^2}{8} \dot{\mathbf{v}}^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{v}}(X_e(p, s), s) (t_{n+1} - s)^2 ds, \end{aligned}$$

restando ambas ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} X_e^{n+1}(p) &= X_e^n(p) + \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) + \frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{v}}(X_e(p, s), s) (t_{n+1} - s)^2 ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \ddot{\mathbf{v}}(X_e(p, s), s) (t_n - s)^2 ds. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta esta igualdad y la expresión para $X_{RK}^{n+1}(p)$ dada en (1.106), resulta

$$\begin{aligned} X_e^{n+1}(p) - X_{RK}^{n+1}(p) &= X_e^n(p) - X_{RK}^n(p) + \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) - \Delta t \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{v}}(X_e(p, s), s)(t_{n+1} - s)^2 ds + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \ddot{\mathbf{v}}(X_e(p, s), s)(t_n - s)^2 ds \end{aligned} \quad (3.23)$$

siendo

$$Y^n(p) = X_{RK}^n(p) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(X_{RK}^n(p)).$$

Además, utilizando el teorema del valor medio del cálculo diferencial, se deduce que para cada $i \in \{1, \dots, d\}$ existe $\sigma_i \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) - \mathbf{v}_i^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) \\ = \text{grad } \mathbf{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \left(Y^n(p) + \sigma_i(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) - Y^n(p)) \right) \cdot (X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) - Y^n(p)). \end{aligned}$$

Utilizando un desarrollo de Taylor de la función $X_e(p, t)$ con respecto a la variable temporal, entorno a t_n y evaluando en $t_{n+\frac{1}{2}}$ obtenemos

$$X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) = X_e^n(p) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(X_e^n(p)) + \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \dot{\mathbf{v}}(X_e(p, s), s)(t_{n+\frac{1}{2}} - s) ds.$$

Teniendo en cuenta esta igualdad y la expresión para $Y^n(p)$ obtenemos

$$\begin{aligned} X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) - Y^n(p) &= X_e^n(p) - X_{RK}^n(p) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(X_e^n(p)) - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^n(X_{RK}^n(p)) \\ &+ \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \dot{\mathbf{v}}(X_e(p, s), s)(t_{n+\frac{1}{2}} - s) ds. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Además, utilizando la regularidad de la velocidad $\mathbf{v}(\cdot, t)$ se deduce que para cada $i \in \{1, \dots, d\}$ existe $\tilde{\sigma}_i \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^n(X_e^n(p)) - \mathbf{v}_i^n(X_{RK}^n(p)) \\ = \text{grad } \mathbf{v}_i^n(X_{RK}^n(p) + \tilde{\sigma}_i(X_e^n(p) - X_{RK}^n(p))) \cdot (X_e^n(p) - X_{RK}^n(p)). \end{aligned}$$

A partir de las igualdades obtenidas se deduce que para cada $i \in \{1, \dots, d\}$

$$\begin{aligned} (X_e^{n+1})_i(p) - (X_{RK}^{n+1})_i(p) &= (X_e^n)_i(p) - (X_{RK}^n)_i(p) \\ &+ \Delta t \text{grad } \mathbf{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \left(Y^n(p) + \sigma_i(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) - Y^n(p)) \right) \cdot (X_e^n(p) - X_{RK}^n(p)) \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_j} \right)^{n+\frac{1}{2}} \left(Y^n(p) + \sigma_i(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) - Y^n(p)) \right) \\ &\cdot (\text{grad } \mathbf{v}_j^n(X_{RK}^n(p) + \tilde{\sigma}_j(X_e^n(p) - X_{RK}^n(p))) \cdot (X_e^n(p) - X_{RK}^n(p))) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{v}}_i(X_e(p, s), s)(t_{n+1} - s)^2 ds + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \ddot{\mathbf{v}}_i(X_e(p, s), s)(t_n - s)^2 ds \\ &+ \Delta t \text{grad } \mathbf{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \left(Y^n(p) + \sigma_i(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) - Y^n(p)) \right) \cdot \left(\int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \dot{\mathbf{v}}(X_e(p, s), s)(t_{n+\frac{1}{2}} - s) ds \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde los índices repetidos indican suma sobre todos los posibles valores del índice. Entonces, podemos escribir

$$X_e^{n+1}(p) - X_{RK}^{n+1}(p) = R^n(p)(X_e^n(p) - X_{RK}^n(p)) + E^n(p), \quad (3.26)$$

siendo

$$R^n : \Omega \longrightarrow Lin, \quad E^n : \Omega \longrightarrow \mathcal{V}, \quad (3.27)$$

definidas por

$$\begin{aligned} R_{ij}^n(p) &:= \delta_{ij} + \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_j} \right)^{n+\frac{1}{2}} \left(Y^n(p) + \sigma_i(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) - Y^n(p)) \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_l} \right)^{n+\frac{1}{2}} \left(Y^n(p) + \sigma_i(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) - Y^n(p)) \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}_l}{\partial x_j} \right)^n (X_{RK}^n(p) + \tilde{\sigma}_l(X_e^n(p) - X_{RK}^n(p))) \quad 1 \leq i, j \leq d, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} E_i^n(p) &:= \frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{v}}_i(X_e(p, s), s) (t_{n+1} - s)^2 ds + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \ddot{\mathbf{v}}_i(X_e(p, s), s) (t_n - s)^2 ds \\ &\quad + \Delta t \operatorname{grad} \mathbf{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \left(Y^n(p) + \sigma_i(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) - Y^n(p)) \right) \\ &\quad \cdot \left(\int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \dot{\mathbf{v}}(X_e(p, s), s) (t_{n+\frac{1}{2}} - s) ds \right) \quad 1 \leq i \leq d, \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (3.30)$$

Además, se verifican

$$\|R^n\|_{0,\infty,\Omega} \leq 1 + \Delta t C(\mathbf{v}), \quad (3.31)$$

$$\|E^n\|_{0,\infty,\Omega} \leq C(\mathbf{v}) \Delta t^3. \quad (3.32)$$

Aplicando normas en (3.26) y teniendo en cuenta estas acotaciones, se deduce

$$|X_e^{n+1}(p) - X_{RK}^{n+1}(p)| \leq (1 + \Delta t C(\mathbf{v})) |X_e^n(p) - X_{RK}^n(p)| + C(\mathbf{v}) \Delta t^3.$$

Entonces, a partir de esta desigualdad es inmediato comprobar por inducción que

$$|X_e^{n+1}(p) - X_{RK}^{n+1}(p)| \leq \sum_{s=1}^n \Delta t C(\mathbf{v}) |X_e^s(p) - X_{RK}^s(p)| + \sum_{s=0}^n C(\mathbf{v}) \Delta t^3.$$

Aplicando el Lema de Gronwall en su versión discreta obtenemos

$$|X_e^{n+1}(p) - X_{RK}^{n+1}(p)| \leq T C(\mathbf{v}) e^{TC(\mathbf{v})} \Delta t^2, \quad (3.33)$$

de lo que se deduce el resultado. \square

Lema 3.3.2. *Supongamos que se verifica la Hipótesis 1.1, $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^2(\mathcal{T}^\delta)$, $X_e \in \mathbf{C}^4(\overline{\Omega} \times [0, T])$ y $\Delta t < \eta$, siendo η la constante que aparece en el Lema 1.5.1. Sea $\Psi^n : \overline{\Omega} \longrightarrow Lin$ definida para cada $n \in \{0, \dots, N\}$ por*

$$\Psi^n(p) = F^n(p) - F_{RK}^n(p), \quad (3.34)$$

para todo $p \in \overline{\Omega}$. Entonces $\Psi^n \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$ y se verifica

$$\|\Psi^n\|_{0,\infty,\Omega} \leq C(\mathbf{v}, T) \Delta t^2, \quad (3.35)$$

para cada $n \in \{0, \dots, N\}$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, utilizando (1.85) y (1.114) se deduce

$$\begin{aligned}
F^{n+1}(p) - F_{RK}^{n+1}(p) &= F^n(p) - F_{RK}^n(p) + \Delta t L^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p))(F^n(p) - F_{RK}^n(p)) \\
&+ \Delta t \left(L^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) - L^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) \right) F_{RK}^n(p) \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2} L^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) L^n(X_e^n(p))(F^n(p) - F_{RK}^n(p)) \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2} \left(L^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) L^n(X_e^n(p)) - L^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) L^n(X_{RK}^n(p)) \right) F_{RK}^n(p) \\
&+ \frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \text{grad}_x \ddot{\mathbf{v}}(X_e(p, s), s) F(p, s) (t_{n+1} - s)^2 ds \\
&+ \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \text{grad}_x \ddot{\mathbf{v}}(X_e(p, s), s) F(p, s) (t_n - s)^2 ds \\
&+ \Delta t L^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \text{grad}_x \dot{\mathbf{v}}(X_e(p, s), s) F(p, s) (t_{n+\frac{1}{2}} - s) ds.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Utilizando el teorema del valor medio del cálculo diferencial se deduce que para cada $1 \leq i, j \leq d$, existen $\sigma_{i,j}, \tilde{\sigma}_{i,j} \in (0, 1)$ tales que

$$\begin{aligned}
L_{ij}^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) - L_{ij}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) &= \text{grad } L_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \left(Y^n(p) + \sigma_{ij}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) - Y^n(p)) \right) \cdot (X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) - Y^n(p)), \\
L_{ij}^n(X_e^n(p)) - L_{ij}^n(X_{RK}^n(p)) &= \text{grad } L_{ij}^n (X_{RK}^n(p) + \tilde{\sigma}_{ij}(X_e^n(p) - X_{RK}^n(p))) \cdot (X_e^n(p) - X_{RK}^n(p)).
\end{aligned}$$

A partir de la igualdad (3.24), teniendo en cuenta la regularidad de la velocidad y el Lema 3.3.1 se deduce

$$|X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) - Y^n(p)| \leq C(\mathbf{v}, T) \Delta t^2 + C(\mathbf{v}, T) \Delta t^3. \tag{3.37}$$

Entonces, a partir de (3.36), y teniendo en cuenta (1.72), (1.134), (3.22) y (3.37) se deduce que

$$\begin{aligned}
\|F^{n+1}(p) - F_{RK}^{n+1}(p)\|_2 &\leq (1 + C(\mathbf{v}) \Delta t + C(\mathbf{v}) \Delta t^2) \|F^n(p) - F_{RK}^n(p)\|_2 \\
&+ C(\mathbf{v}, T) \Delta t^3 + C(\mathbf{v}, T) \Delta t^4 + C(\mathbf{v}, T) \Delta t^5,
\end{aligned}$$

donde $\|\cdot\|_2$ denota la norma en el espacio de tensores inducida por la norma vectorial de \mathcal{V} . A partir de esta desigualdad es inmediato comprobar por inducción que se verifica

$$\begin{aligned}
\|F^{n+1}(p) - F_{RK}^{n+1}(p)\|_2 &\leq (C(\mathbf{v}) \Delta t + C(\mathbf{v}) \Delta t^2) \sum_{s=1}^n \|F^s(p) - F_{RK}^s(p)\|_2 \\
&+ \sum_{s=0}^n (C(\mathbf{v}, T) \Delta t^3 + C(\mathbf{v}, T) \Delta t^4 + C(\mathbf{v}, T) \Delta t^5).
\end{aligned}$$

Por último, aplicando el Lema de Gronwall en su versión discreta se obtiene el resultado. \square

Lema 3.3.3. *Supongamos que se verifica la Hipótesis 1.1, $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^2(\mathcal{T}^\delta)$, $X_e \in \mathbf{C}^4(\overline{\Omega} \times [0, T])$ y $\Delta t < \min\{\eta, 1/(2\|\text{grad } \mathbf{v}\|_{0,\infty,\mathcal{T}^\delta})\}$, siendo η la constante que aparece en el Lema 1.5.1. Sea $\Psi^n : \overline{\Omega} \longrightarrow \text{Lin}$ definida para cada $n \in \{0, \dots, N\}$ por*

$$\Psi^n(p) = (F^n)^{-1}(p) - (F_{RK}^n)^{-1}(p), \tag{3.38}$$

para todo $p \in \overline{\Omega}$. Entonces $\Psi^n \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ y se verifica

$$\|\Psi^n\|_{0,\infty,\Omega} \leq C(\mathbf{v}, T)\Delta t^2, \quad (3.39)$$

para cada $n \in \{0, \dots, N\}$. Además si $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^3(\mathcal{T}^\delta)$ y $X_e \in \mathbf{C}^5(\overline{\Omega} \times [0, T])$ se tiene

$$\|\nabla \Psi^n\|_{0,\infty,\Omega} \leq C(\mathbf{v}, T)\Delta t^2, \quad (3.40)$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, utilizando (1.90) y (1.140) se deduce

$$\begin{aligned} (F^{n+1})^{-1}(p) - (F_{RK}^{n+1})^{-1}(p) &= (F^n)^{-1}(p) - (F_{RK}^n)^{-1}(p) \\ &- \Delta t \left((F^n)^{-1}(p) - (F_{RK}^n)^{-1}(p) \right) L^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) \\ &- \Delta t (F_{RK}^n)^{-1}(p) \left(L^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) - L^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) \right) \\ &- \frac{\Delta t^2}{2} \left((F^n)^{-1}(p) - (F_{RK}^n)^{-1}(p) \right) L^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) L^n(X_e^n(p)) \\ &- \frac{\Delta t^2}{2} (F_{RK}^n)^{-1}(p) \left(L^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) L^n(X_e^n(p)) - L^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) L^n(X_{RK}^n(p)) \right) \\ &+ \Delta t^2 \left((F^n)^{-1}(p) - (F_{RK}^n)^{-1}(p) \right) \left(L^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 (X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) \\ &+ \Delta t^2 (F_{RK}^n)^{-1}(p) \left[\left(L^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 (X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) - \left(L^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 (Y^n(p)) \right] + O(\Delta t^3), \end{aligned}$$

siendo $O(\Delta t^3)$ dependiendo de \mathbf{v} y T . A partir de esta igualdad y la análoga para el gradiente (ver Proposición 1.5.8) y razonando como en el lema anterior se comprueba el resultado. \square

Lema 3.3.4. *Asumimos que se verifica la Hipótesis 1.1, $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^2(\mathcal{T}^\delta)$, $X_e \in \mathbf{C}^4(\overline{\Omega} \times [0, T])$ y $\Delta t < \eta$, siendo η la constante que aparece en el Lema 1.5.1. Sea $\xi^n : \overline{\Omega} \rightarrow \mathcal{V}$ definida para cada $n \in \{0, \dots, N\}$ por*

$$\xi^n(p) = \det F^n(p) - \det F_{RK}^n(p), \quad (3.41)$$

para todo $p \in \overline{\Omega}$. Entonces $\xi^n \in C^1(\overline{\Omega})$ y se verifica

$$\|\xi^n\|_{0,\infty,\Omega} \leq C(\mathbf{v}, T)\Delta t^2, \quad (3.42)$$

para cada $n \in \{0, \dots, N\}$. Además si $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^3(\mathcal{T}^\delta)$ y $X_e \in \mathbf{C}^5(\overline{\Omega} \times [0, T])$ se cumple

$$\|\nabla \xi^n\|_{0,\infty,\Omega} \leq C(\mathbf{v}, T)\Delta t^2. \quad (3.43)$$

DEMOSTRACIÓN. Utilizando la Proposición 1.5.9 y el Corolario 1.5.3 se deduce

$$\begin{aligned}
& \det F^{n+1}(p) - \det F_{RK}^{n+1}(p) = \det F^n(p) - \det F_{RK}^n(p) \\
& + \Delta t (\det F^n(p) - \det F_{RK}^n(p)) \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) \\
& + \Delta t \det F_{RK}^n(p) \left(\operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) - \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) \right) \\
& + \frac{\Delta t^2}{2} (\det F^n(p) - \det F_{RK}^n(p)) L^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) \cdot (L^n)^T(X_e^n(p)) \\
& + \frac{\Delta t^2}{2} \det F_{RK}^n(p) \left(L^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) \cdot (L^n)^T(X_e^n(p)) - L^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) \cdot (L^n)^T(X_{RK}^n(p)) \right) \\
& + \frac{\Delta t^2}{2} (\det F^n(p) - \det F_{RK}^n(p)) (\operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)))^2 \\
& + \frac{\Delta t^2}{2} \det F_{RK}^n(p) \left((\operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)))^2 - (\operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)))^2 \right) \\
& - \frac{\Delta t^2}{2} (\det F^n(p) - \det F_{RK}^n(p)) L^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) \cdot \left(L^{n+\frac{1}{2}} \right)^T(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) \\
& - \frac{\Delta t^2}{2} \det F_{RK}^n(p) \left\{ L^{n+\frac{1}{2}}(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) \cdot \left(L^{n+\frac{1}{2}} \right)^T(X_e^{n+\frac{1}{2}}(p)) \right. \\
& \left. - L^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) \cdot \left(L^{n+\frac{1}{2}} \right)^T(Y^n(p)) \right\} + O(\Delta t^3).
\end{aligned} \tag{3.44}$$

para $0 \leq n \leq N-1$, siendo $O(\Delta t^3)$ dependiente de \mathbf{v} y T . A partir de esta igualdad y la análoga para el gradiente (ver Proposición 1.5.9) y procediendo como en la demostración del Lema 3.3.2 se deduce el resultado. \square

Lema 3.3.5. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 1.1 y 1.3, $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^2(\mathcal{T}^\delta)$, $X_e \in \mathbf{C}^4(\overline{\Omega} \times [0, T])$ y $\Delta t < \eta$, siendo η la constante que aparece en el Lema 1.5.1. Sea $\varphi \in C^3(L^2(\Omega))$, $\rho_m \in C^2(L^\infty(\Omega))$ y $\xi^{n+\frac{1}{2}} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $n \in \{0, \dots, N-1\}$ por*

$$\begin{aligned}
\xi^{n+\frac{1}{2}}(p) &:= \rho \circ X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) \det F^{n+\frac{1}{2}}(p) \dot{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}(p) \\
&- \frac{1}{2} (\rho \circ X_{RK}^{n+1}(p) \det F_{RK}^{n+1}(p) + \rho \circ X_{RK}^n(p) \det F_{RK}^n(p)) \frac{\varphi^{n+1}(p) - \varphi^n(p)}{\Delta t},
\end{aligned} \tag{3.45}$$

casi por doquier $p \in \Omega$. Entonces $\xi^{n+\frac{1}{2}} \in L^2(\Omega)$ y se verifica

$$\|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Omega} \leq C(T, \mathbf{v}, \rho) \Delta t^2 \|\varphi\|_{C^3(L^2(\Omega))}, \tag{3.46}$$

para cada $n \in \{0, \dots, N-1\}$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar descomponemos la función $\xi^{n+\frac{1}{2}}$ en cuatro

$$\xi^{n+\frac{1}{2}} = \xi_1^{n+\frac{1}{2}} + \xi_2^{n+\frac{1}{2}} + \xi_3^{n+\frac{1}{2}} + \xi_4^{n+\frac{1}{2}},$$

con

$$\begin{aligned}
\xi_1^{n+\frac{1}{2}}(p) &:= \rho \circ X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) \det F^{n+\frac{1}{2}}(p) \dot{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}(p) \\
&\quad - \frac{1}{2} (\rho \circ X_e^{n+1}(p) \det F^{n+1}(p) + \rho \circ X_e^n(p) \det F^n(p)) \dot{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}(p), \\
\xi_2^{n+\frac{1}{2}}(p) &:= \frac{1}{2} (\rho \circ X_e^{n+1}(p) \det F^{n+1}(p) + \rho \circ X_e^n(p) \det F^n(p)) \dot{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}(p) \\
&\quad - \frac{1}{2} (\rho \circ X_{RK}^{n+1}(p) \det F^{n+1}(p) + \rho \circ X_{RK}^n(p) \det F^n(p)) \dot{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}(p), \\
\xi_3^{n+\frac{1}{2}}(p) &:= \frac{1}{2} (\rho \circ X_{RK}^{n+1}(p) \det F^{n+1}(p) + \rho \circ X_{RK}^n(p) \det F^n(p)) \dot{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}(p) \\
&\quad - \frac{1}{2} (\rho \circ X_{RK}^{n+1}(p) \det F_{RK}^{n+1}(p) + \rho \circ X_{RK}^n(p) \det F_{RK}^n(p)) \dot{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}(p), \\
\xi_4^{n+\frac{1}{2}}(p) &:= \frac{1}{2} (\rho \circ X_{RK}^{n+1}(p) \det F_{RK}^{n+1}(p) + \rho \circ X_{RK}^n(p) \det F_{RK}^n(p)) \dot{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}(p) \\
&\quad - \frac{1}{2} (\rho \circ X_{RK}^{n+1}(p) \det F_{RK}^{n+1}(p) + \rho \circ X_{RK}^n(p) \det F_{RK}^n(p)) \frac{\varphi^{n+1}(p) - \varphi^n(p)}{\Delta t},
\end{aligned}$$

casi por doquier $p \in \Omega$. La estimación para $\xi_1^{n+\frac{1}{2}}$ se obtiene utilizando el desarrollo de Taylor de segundo orden con el resto en forma integral de la función

$$G(p, s) = \rho(X_e(p, s)) \det F(p, s) \quad s \in [0, T],$$

respecto de la variable temporal entorno a $s = t^{n+\frac{1}{2}}$. Concretamente, se deduce

$$G^{n+\frac{1}{2}}(p) - \frac{G^{n+1}(p) + G^n(p)}{2} = -\frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \ddot{G}(p, s)(t_{n+1} - s) ds + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \ddot{G}(p, s)(t_n - s) ds,$$

Calculamos la derivada segunda de la función G :

$$\ddot{G}(p, s) = \ddot{\rho}(X_e(p, s)) \det F(p, s) + 2\dot{\rho}(X_e(p, s))(\det F)'(p, s) + \rho(X_e(p, s))((\det F)')'(p, s).$$

Utilizando la regularidad de las funciones involucradas se tiene que $\xi_1^{n+\frac{1}{2}} \in L^2(\Omega)$ y $\ddot{G} \in C^0(L^\infty(\Omega))$. Además, teniendo en cuenta las igualdades obtenidas y (1.77), (1.78) y (1.101), se deduce que

$$\|\xi_1^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Omega} \leq C(T, \mathbf{v}, \rho) \Delta t^2 \|\varphi\|_{C^1(L^2(\Omega))}. \quad (3.47)$$

Obtengamos una acotación para la función $\xi_2^{n+\frac{1}{2}}$. Trivialmente, utilizando la regularidad de las funciones involucradas, se tiene que $\xi_2^{n+\frac{1}{2}} \in L^2(\Omega)$. Además, usando el teorema del valor medio del cálculo diferencial se deduce

$$\rho(X_e^l(p)) - \rho(X_{RK}^l(p)) = \text{grad } \rho \left(X_{RK}^l(p) + \sigma^l (X_e^l(p) - X_{RK}^l(p)) \right) \cdot (X_e^l(p) - X_{RK}^l(p)),$$

para algún $\sigma^l \in (0, 1)$, siendo $l = n+1, n$. Entonces, a partir de esta igualdad, teniendo en cuenta (1.78) y (3.22), se deduce que

$$\|\xi_2^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Omega} \leq C(T, \mathbf{v}, \rho) \Delta t^2 \|\varphi\|_{C^1(L^2(\Omega))}. \quad (3.48)$$

La estimación para $\xi_3^{n+\frac{1}{2}}$ se obtiene aplicando el Lema 3.3.4. En efecto, por definición, $\xi_3^{n+\frac{1}{2}} \in L^2(\Omega)$, además teniendo en cuenta (3.42) se tiene

$$\|\xi_3^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Omega} \leq C(T, \mathbf{v}, \rho) \Delta t^2 \|\varphi\|_{C^1(L^2(\Omega))}. \quad (3.49)$$

Por último, vamos a acotar la aplicación $\xi_4^{n+\frac{1}{2}}$. Nótese que teniendo en cuenta (1.153) y el espacio al que pertenecen las funciones involucradas se deduce que $\xi_4^{n+\frac{1}{2}} \in L^2(\Omega)$. Además, utilizando el desarrollo de Taylor de tercer orden con el resto en forma integral de la función $\varphi(p, t)$ respecto de la variable temporal, entorno a $t_{n+\frac{1}{2}}$, se deduce

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}(p) - \frac{\varphi^{n+1}(p) - \varphi^n(p)}{\Delta t} &= -\frac{1}{2\Delta t} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \ddot{\varphi}(p, s)(t_{n+1} - s)^2 ds \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \ddot{\varphi}(p, s)(t_n - s)^2 ds, \end{aligned}$$

casi por doquier $p \in \Omega$. Aplicando normas se tiene

$$\left\| \dot{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}(p) - \frac{\varphi^{n+1}(p) - \varphi^n(p)}{\Delta t} \right\|_{0,2,\Omega} \leq \Delta t^2 \|\varphi\|_{C^3(L^2(\Omega))},$$

de lo que se deduce

$$\|\xi_4^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Omega} \leq C(T, \mathbf{v}, \rho) \Delta t^2 \|\varphi\|_{C^3(L^2(\Omega))}, \quad (3.50)$$

donde hemos tenido en cuenta que se verifica la primera ecuación de (1.153). Finalmente (3.46) se obtiene de (3.47), (3.48), (3.49) y (3.50). \square

Lema 3.3.6. *Supongamos que $X_e \in \mathbf{C}^3(\overline{\Omega} \times [0, T])$ y $A_m \in C^2(\mathbb{L}^\infty(\Omega))$. Sea $\mathbf{w} \in C^2(\mathbf{L}^2(\Omega))$ y $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} : \Omega \longrightarrow \mathcal{V}$ definida para cada $n \in \{0, \dots, N-1\}$ por*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}(p) &:= \det F^{n+\frac{1}{2}}(p) \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-1}(p) A \circ X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-T}(p) \mathbf{w}^{n+\frac{1}{2}}(p) \\ &\quad - \frac{\det F^{n+1}(p) \left(F^{n+1} \right)^{-1}(p) A \circ X_e^{n+1}(p) \left(F^{n+1} \right)^{-T}(p) \left(\frac{\mathbf{w}^{n+1}(p) + \mathbf{w}^n(p)}{2} \right)}{2} \\ &\quad - \frac{\det F^n(p) \left(F^n \right)^{-1}(p) A \circ X_e^n(p) \left(F^n \right)^{-T}(p) \left(\frac{\mathbf{w}^{n+1}(p) + \mathbf{w}^n(p)}{2} \right)}{2}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

casi por doquier $p \in \Omega$. Entonces, $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ y se verifica

$$\|\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Omega} \leq C(T, \mathbf{v}, A) \Delta t^2 \|\mathbf{w}\|_{C^2(\mathbf{L}^2(\Omega))}, \quad (3.52)$$

para cada $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Además, si $X_e \in \mathbf{C}^4(\overline{\Omega} \times [0, T])$, $A_m \in C^2(\mathbb{W}^{1,\infty}(\Omega))$ y $\mathbf{w} \in C^2(\mathbf{H}^1(\Omega))$ entonces $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ y

$$\|\text{Div } \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Omega} \leq C(T, \mathbf{v}, A) \Delta t^2 \|\mathbf{w}\|_{C^2(\mathbf{H}^1(\Omega))}, \quad (3.53)$$

para cada $n \in \{0, \dots, N-1\}$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, descomponemos la función $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ en dos

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}_1^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{u}_2^{n+\frac{1}{2}}$$

con

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1^{n+\frac{1}{2}}(p) &= \det F^{n+\frac{1}{2}}(p) \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-1}(p) A \circ X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-T}(p) \mathbf{w}^{n+\frac{1}{2}}(p) \\
&\quad - \det F^{n+\frac{1}{2}}(p) \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-1}(p) A \circ X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-T}(p) \left(\frac{\mathbf{w}^{n+1}(p) + \mathbf{w}^n(p)}{2} \right), \\
\mathbf{u}_2^{n+\frac{1}{2}}(p) &= \det F^{n+\frac{1}{2}}(p) \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-1}(p) A \circ X_e^{n+\frac{1}{2}}(p) \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-T}(p) \left(\frac{\mathbf{w}^{n+1}(p) + \mathbf{w}^n(p)}{2} \right) \\
&\quad - \frac{\det F^{n+1}(p) \left(F^{n+1} \right)^{-1}(p) A \circ X_e^{n+1}(p) \left(F^{n+1} \right)^{-T}(p) \left(\frac{\mathbf{w}^{n+1}(p) + \mathbf{w}^n(p)}{2} \right)}{2} \\
&\quad - \frac{\det F^n(p) \left(F^n \right)^{-1}(p) A \circ X_e^n(p) \left(F^n \right)^{-T}(p) \left(\frac{\mathbf{w}^{n+1}(p) + \mathbf{w}^n(p)}{2} \right)}{2}.
\end{aligned}$$

casi por doquier $p \in \Omega$. La estimación para $\mathbf{u}_1^{n+\frac{1}{2}}$ se obtiene utilizando el desarrollo de Taylor de segundo orden con el resto en forma integral de la función $\mathbf{w}(p, s)$ respecto de la variable temporal entorno a $s = t^{n+\frac{1}{2}}$. Concretamente, se deduce

$$\mathbf{w}^{n+\frac{1}{2}}(p) - \frac{\mathbf{w}^{n+1}(p) + \mathbf{w}^n(p)}{2} = \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \ddot{\mathbf{w}}(p, s)(t_n - s) ds - \frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{w}}(p, s)(t_{n+1} - s) ds. \quad (3.54)$$

Utilizando esta expresión, analizamos la regularidad de la aplicación $\mathbf{u}_1^{n+\frac{1}{2}}$:

- Si $\mathbf{w} \in C^2(\mathbf{L}^2(\Omega))$, $A_m \in C^0(\mathbb{L}^\infty(\Omega))$ entonces $\mathbf{u}_1^{n+\frac{1}{2}} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ y teniendo en cuenta (1.76) y (1.78) se deduce

$$\|\mathbf{u}_1^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Omega} \leq C(T, \mathbf{v}, A) \Delta t^2 \|\mathbf{w}\|_{C^2(\mathbf{L}^2(\Omega))}. \quad (3.55)$$

- Si $\mathbf{w} \in C^2(\mathbf{H}^1(\Omega))$, $A_m \in C^2(\mathbb{W}^{1,\infty}(\Omega))$ entonces $\mathbf{u}_1^{n+\frac{1}{2}} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ y teniendo en cuenta (1.76), (1.78), (1.81) y (1.87) se deduce

$$\|\text{Div } \mathbf{u}_1^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Omega} \leq C(T, \mathbf{v}, A) \Delta t^2 \|\mathbf{w}\|_{C^2(\mathbf{H}^1(\Omega))}. \quad (3.56)$$

Para obtener la estimación de $\mathbf{u}_2^{n+\frac{1}{2}}$, introducimos la siguiente función auxiliar

$$G(p, s) = \det F(p, s) F^{-1}(p, s) A \circ X_e(p, s) F^{-T}(p, s), \quad (3.57)$$

y utilizamos desarrollos de Taylor de dicha función, obteniendo

$$G^{n+\frac{1}{2}}(p) - \frac{G^{n+1}(p) + G^n(p)}{2} = -\frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \ddot{G}(p, s)(t_{n+1} - s) ds + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \ddot{G}(p, s)(t_n - s) ds, \quad (3.58)$$

casi por doquier $p \in \Omega$. Calculamos la derivada segunda de la aplicación G :

$$\begin{aligned}
\ddot{G} &= ((\det F) \cdot)' (F)^{-1} A \circ X_e (F)^{-T} + \det F ((F^{-1}) \cdot)' A \circ X_e F^{-T} \\
&\quad + \det F F^{-1} \ddot{A} \circ X_e F^{-T} + \det F F^{-1} A \circ X_e (((F^{-1}) \cdot)')^T \\
&\quad + 2(\det F) \cdot (F^{-1}) \cdot A \circ X_e F^{-T} + 2(\det F) \cdot F^{-1} \dot{A} \circ X_e F^{-T} \\
&\quad + 2(\det F) \cdot F^{-1} A \circ X_e ((F^{-1}) \cdot)^T + 2 \det F (F^{-1}) \cdot \dot{A} \circ X_e F^{-T} \\
&\quad + 2 \det F (F^{-1}) \cdot A \circ X_e ((F^{-1}) \cdot)^T + 2 \det F F^{-1} \dot{A} \circ X_e ((F^{-1}) \cdot)^T.
\end{aligned}$$

Utilizando estas expresiones podemos conocer la regularidad de $\mathbf{u}_2^{n+\frac{1}{2}}$:

- Si $\mathbf{w} \in C^0(\mathbf{L}^2(\Omega))$, $A_m \in C^2(\mathbb{L}^\infty(\Omega))$ y $X_e \in \mathbf{C}^3(\overline{\Omega} \times [0, T])$ entonces $\mathbf{u}_2^{n+\frac{1}{2}} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Además, utilizando (1.74), (1.76), (1.77), (1.78), (1.82) y (1.101) se deduce

$$\|\mathbf{u}_2^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Omega} \leq C(T, \mathbf{v}, A)\Delta t^2 \|\mathbf{w}\|_{C^0(\mathbf{L}^2(\Omega))}. \quad (3.59)$$

- Si $\mathbf{w} \in C^0(\mathbf{H}^1(\Omega))$, $A_m \in C^2(\mathbb{W}^{1,\infty}(\Omega))$ y $X_e \in \mathbf{C}^4(\overline{\Omega} \times [0, T])$ entonces $\mathbf{u}_2^{n+\frac{1}{2}} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$. Además, utilizando (1.74), (1.76), (1.77), (1.78), (1.81), (1.82), (1.87), (1.101), y la Nota 1.5.2 y 1.5.3 se deduce

$$\|\operatorname{Div} \mathbf{u}_2^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Omega} \leq C(T, \mathbf{v}, A)\Delta t^2 \|\mathbf{w}\|_{C^0(\mathbf{H}^1(\Omega))}. \quad (3.60)$$

Teniendo en cuenta las estimaciones obtenidas para $\mathbf{u}_1^{n+\frac{1}{2}}$ y $\mathbf{u}_2^{n+\frac{1}{2}}$ se deduce el resultado. \square

Lema 3.3.7. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 1.1 y 1.4, $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^2(\mathcal{T}^\delta)$, $X_e \in \mathbf{C}^4(\overline{\Omega} \times [0, T])$ y $\Delta t < \min\{\eta, 1/(2\|\operatorname{grad} \mathbf{v}\|_{0,\infty,\mathcal{T}^\delta})\}$, siendo η la constante que aparece en el Lema 1.5.1. Sea $n \in \{0, \dots, N\}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $\mathbf{u}^n : \Omega \rightarrow \mathcal{V}$ definida por*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^n(p) &:= \det F^n(p) (F^n)^{-1}(p) A(X_e^n(p)) (F^n)^{-T}(p) \mathbf{w}(p) \\ &\quad - \det F_{RK}^n(p) (F_{RK}^n)^{-1}(p) A(X_{RK}^n(p)) (F_{RK}^n)^{-T}(p) \mathbf{w}(p). \end{aligned} \quad (3.61)$$

casi por doquier $p \in \Omega$. Entonces, $\mathbf{u}^n \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ y se verifica

$$\|\mathbf{u}^n\|_{0,2,\Omega} \leq C(T, \mathbf{v}, A)\Delta t^2 \|\mathbf{w}\|_{0,2,\Omega}. \quad (3.62)$$

Además, si $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^3(\mathcal{T}^\delta)$, $X_e \in \mathbf{C}^5(\overline{\Omega} \times [0, T])$, $A \in \mathbb{W}^{2,\infty}(\mathcal{O}^\delta)$ y $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ entonces $\mathbf{u}^n \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ y

$$\|\operatorname{Div} \mathbf{u}^n\|_{0,2,\Omega} \leq C(T, \mathbf{v}, A)\Delta t^2 \|\mathbf{w}\|_{1,2,\Omega}. \quad (3.63)$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar descomponemos la función \mathbf{u}^n en cuatro

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{u}_1^n + \mathbf{u}_2^n + \mathbf{u}_3^n + \mathbf{u}_4^n, \quad (3.64)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^n(p) &:= \det F^n(p) (F^n)^{-1}(p) A(X_e^n(p)) (F^n)^{-T}(p) \mathbf{w}(p) \\ &\quad - \det F_{RK}^n(p) (F^n)^{-1}(p) A(X_e^n(p)) (F^n)^{-T}(p) \mathbf{w}(p), \\ \mathbf{u}_2^n(p) &:= \det F_{RK}^n(p) (F^n)^{-1}(p) A(X_e^n(p)) (F^n)^{-T}(p) \mathbf{w}(p) \\ &\quad - \det F_{RK}^n(p) (F_{RK}^n)^{-1}(p) A(X_e^n(p)) (F^n)^{-T}(p) \mathbf{w}(p), \\ \mathbf{u}_3^n(p) &:= \det F_{RK}^n(p) (F_{RK}^n)^{-1}(p) A(X_e^n(p)) (F^n)^{-T}(p) \mathbf{w}(p) \\ &\quad - \det F_{RK}^n(p) (F_{RK}^n)^{-1}(p) A(X_{RK}^n(p)) (F^n)^{-T}(p) \mathbf{w}(p), \\ \mathbf{u}_4^n(p) &:= \det F_{RK}^n(p) (F_{RK}^n)^{-1}(p) A(X_{RK}^n(p)) (F^n)^{-T}(p) \mathbf{w}(p) \\ &\quad - \det F_{RK}^n(p) (F_{RK}^n)^{-1}(p) A(X_{RK}^n(p)) (F_{RK}^n)^{-T}(p) \mathbf{w}(p), \end{aligned}$$

casi por doquier $p \in \Omega$. La cota para \mathbf{u}_1^n se obtiene a partir de (1.76) y (3.42). La estimación para \mathbf{u}_2^n se deduce de (1.76), (3.39) y de la primera desigualdad de (1.153).

Por otro lado, utilizando el teorema del valor medio del cálculo diferencial se tiene que para cada $i, j \in \{1, \dots, d\}$ existe $\sigma_{ij} \in (0, 1)$ tal que

$$A_{ij}(X_e^n(p)) - A_{ij}(X_{RK}^n(p)) = \operatorname{grad} A_{ij}(X_{RK}^n(p) + \sigma_{ij}(X_e^n(p) - X_{RK}^n(p))) \cdot (X_e^n(p) - X_{RK}^n(p)),$$

casi por doquier $p \in \Omega$. Entonces, a partir de esta igualdad y teniendo en cuenta (1.76), (1.142), (1.153) y (3.22) se obtiene la cota para \mathbf{u}_3^n . La estimación para \mathbf{u}_4^n se deduce de (1.142), (1.153) y (3.39). Finalmente, la acotación (3.63) se obtiene aplicando gradientes en (3.64) y teniendo en cuenta, además de las ecuaciones consideradas para la estimación anterior, (1.81), (1.87), las análogas para las aproximadas (que se deducen de (1.140) y (1.151)), y también (3.35), (3.40) y (3.43). \square

Lema 3.3.8. *Supongamos que $X_e \in \mathbf{C}^3(\overline{\Omega} \times [0, T])$. Sea $\varphi \in C^2(L^2(\Gamma^R))$ y $\xi^{n+\frac{1}{2}} : \Gamma^R \rightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $n \in \{0, \dots, N-1\}$ por*

$$\begin{aligned} \xi^{n+\frac{1}{2}}(p) &:= \det F^{n+\frac{1}{2}}(p) \left| \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \varphi^{n+\frac{1}{2}}(p) \\ &\quad - \frac{\det F^{n+1}(p) \left| \left(F^{n+1} \right)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right|}{2} \left(\frac{\varphi^{n+1}(p) + \varphi^n(p)}{2} \right) \\ &\quad - \frac{\det F^n(p) \left| \left(F^n \right)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right|}{2} \left(\frac{\varphi^{n+1}(p) + \varphi^n(p)}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Entonces, $\xi^{n+\frac{1}{2}} \in L^2(\Gamma^R)$ y se verifica

$$\|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Gamma^R} \leq C(T, \mathbf{v}) \Delta t^2 \|\varphi\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))}, \quad (3.66)$$

para cada $n \in \{0, \dots, N-1\}$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, descomponemos la función $\xi^{n+\frac{1}{2}}$ en dos

$$\xi^{n+\frac{1}{2}} = \xi_1^{n+\frac{1}{2}} + \xi_2^{n+\frac{1}{2}}$$

con

$$\begin{aligned} \xi_1^{n+\frac{1}{2}}(p) &= \det F^{n+\frac{1}{2}}(p) \left| \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \varphi^{n+\frac{1}{2}}(p) \\ &\quad - \det F^{n+\frac{1}{2}}(p) \left| \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \left(\frac{\varphi^{n+1}(p) + \varphi^n(p)}{2} \right), \\ \xi_2^{n+\frac{1}{2}}(p) &= \det F^{n+\frac{1}{2}}(p) \left| \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \left(\frac{\varphi^{n+1}(p) + \varphi^n(p)}{2} \right) \\ &\quad - \frac{\det F^{n+1}(p) \left| \left(F^{n+1} \right)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right|}{2} \left(\frac{\varphi^{n+1}(p) + \varphi^n(p)}{2} \right) \\ &\quad - \frac{\det F^n(p) \left| \left(F^n \right)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right|}{2} \left(\frac{\varphi^{n+1}(p) + \varphi^n(p)}{2} \right). \end{aligned}$$

La estimación para $\xi_1^{n+\frac{1}{2}}$ se obtiene utilizando el desarrollo de Taylor de segundo orden con el resto en forma integral de la función $\varphi(p, s)$ respecto de la variable temporal entorno a $s = t^{n+\frac{1}{2}}$. Concretamente, se deduce

$$\varphi^{n+\frac{1}{2}}(p) - \frac{\varphi^{n+1}(p) + \varphi^n(p)}{2} = \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \ddot{\varphi}(p, s)(t_n - s) ds - \frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \ddot{\varphi}(p, s)(t_{n+1} - s) ds. \quad (3.67)$$

Utilizando esta expresión y teniendo en cuenta (1.76) y (1.78) se deduce

$$\|\xi_1^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Gamma^R} \leq C(T, \mathbf{v}) \Delta t^2 \|\varphi\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))}. \quad (3.68)$$

Para obtener la estimación de $\xi_2^{n+\frac{1}{2}}$, introducimos la siguiente función auxiliar

$$G(p, s) = \det F(p, s) |F^{-T}(p, s)\mathbf{m}(p)|, \quad (3.69)$$

y utilizamos desarrollos de Taylor de dicha función, obteniendo

$$G^{n+\frac{1}{2}}(p) - \frac{G^{n+1}(p) + G^n(p)}{2} = -\frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \ddot{G}(p, s)(t_{n+1} - s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \ddot{G}(p, s)(t_n - s)ds. \quad (3.70)$$

Calculando la derivada segunda de la función G , teniendo en cuenta (1.72), (1.74), (1.76), (1.77), (1.78), (1.82) y (1.101) se deduce facilmente

$$\|\xi_2^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Gamma^R} \leq C(T, \mathbf{v})\Delta t^2 \|\varphi\|_{C^0(L^2(\Gamma^R))}. \quad (3.71)$$

El resultado se obtiene a partir de las estimaciones obtenidas para $\xi_1^{n+\frac{1}{2}}$ y $\xi_2^{n+\frac{1}{2}}$. \square

Lema 3.3.9. *Supongamos que $X_e \in \mathbf{C}^3(\overline{\Omega} \times [0, T])$. Sea $\varphi \in C^2(L^2(\Gamma^R))$ y $\xi^{n+\frac{1}{2}} : \Gamma^R \rightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $n \in \{0, \dots, N-1\}$ por*

$$\begin{aligned} \xi^{n+\frac{1}{2}}(p) &:= \det F^{n+\frac{1}{2}}(p) \left| \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \varphi^{n+\frac{1}{2}}(p) \\ &\quad - \frac{\det F^{n+1}(p) \left| \left(F^{n+1} \right)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \varphi^{n+1}(p)}{2} \\ &\quad - \frac{\det F^n(p) \left| \left(F^n \right)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \varphi^n(p)}{2}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Entonces, $\xi^{n+\frac{1}{2}} \in L^2(\Gamma^R)$ y se verifica

$$\|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Gamma^R} \leq \Delta t^2 \|\det F |F^{-T} \mathbf{m}| \varphi\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))}, \quad (3.73)$$

$$\|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Gamma^R} \leq C(T, \mathbf{v})\Delta t^2 \|\varphi\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))}, \quad (3.74)$$

para cada $n \in \{0, \dots, N-1\}$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, introducimos la siguiente función auxiliar

$$G(p, s) = \det F(p, s) |F^{-T}(p, s)\mathbf{m}(p)| \varphi(p, s),$$

y utilizamos desarrollos de Taylor de dicha función, obteniendo

$$G^{n+\frac{1}{2}}(p) - \frac{G^{n+1}(p) + G^n(p)}{2} = -\frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \ddot{G}(p, s)(t_{n+1} - s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \ddot{G}(p, s)(t_n - s)ds,$$

Por la regularidad de las funciones involucradas se deduce que $\ddot{G} \in C^0(L^2(\Gamma^R))$ y entonces se tiene (3.73). Además, calculando la derivada segunda de la función G , teniendo en cuenta (1.72), (1.74), (1.76), (1.77), (1.78), (1.82) y (1.101) se deduce facilmente (3.74). \square

Lema 3.3.10. *Supongamos que se verifica las Hipótesis 1.1, y además $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^2(\mathcal{T}^\delta)$, $X_e \in \mathbf{C}^4(\overline{\Omega} \times [0, T])$ y $\Delta t < \min\{\eta, 1/(2\|\text{grad } \mathbf{v}\|_{0,\infty,\mathcal{T}^\delta})\}$, siendo η la constante que aparece en el Lema 1.5.1. Sea $n \in \{0, \dots, N\}$, $\varphi \in L^2(\Gamma^R)$ y $\xi^n : \Gamma^R \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\begin{aligned} \xi^n(p) &:= \det F^n(p) \left| (F^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \varphi(p) \\ &\quad - \det F_{RK}^n(p) \left| (F_{RK}^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \varphi(p). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Entonces, $\xi^n \in L^2(\Gamma^R)$ y se verifica

$$\|\xi^n\|_{0,2,\Gamma^R} \leq C(T, \mathbf{v}) \Delta t^2 \|\varphi\|_{0,2,\Gamma^R}. \quad (3.76)$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar descomponemos la función ξ^n en dos

$$\xi^n = \xi_1^n + \xi_2^n, \quad (3.77)$$

siendo

$$\begin{aligned} \xi_1^n(p) &:= \det F^n(p) \left| (F^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \varphi(p) \\ &\quad - \det F_{RK}^n(p) \left| (F^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \varphi(p), \\ \xi_2^n(p) &:= \det F_{RK}^n(p) \left| (F^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \varphi(p) \\ &\quad - \det F_{RK}^n(p) \left| (F_{RK}^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \varphi(p). \end{aligned}$$

La cota para ξ_1^n se obtiene a partir de (1.76) y (3.42). Finalmente, la cota para ξ_2^n se deduce de (1.153) y (3.39), teniendo en cuenta que se verifica

$$\left| \left| (F^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| - \left| (F_{RK}^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \right| \leq \left| \left((F^n)^{-T}(p) - (F_{RK}^n)^{-T}(p) \right) \mathbf{m}(p) \right|.$$

□

Lema 3.3.11. *Supongamos que se verifica la Hipótesis 1.1, y además $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^2(\mathcal{T}^\delta)$, $X_e \in \mathbf{C}^4(\overline{\Omega} \times [0, T])$ y $\Delta t < \min\{\eta, 1/(2\|\text{grad } \mathbf{v}\|_{0,\infty,\mathcal{T}^\delta})\}$, siendo η la constante que aparece en el Lema 1.5.1. Sea $n \in \{0, \dots, N\}$, $\varphi \in H^1(G_{t_n}^\delta)$ siendo $G_{t_n}^\delta$ el conjunto definido en (1.122), y $\xi^n : \Gamma^R \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\begin{aligned} \xi^n(p) &:= \det F^n(p) \left| (F^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \varphi(X_e^n(p)) \\ &\quad - \det F_{RK}^n(p) \left| (F_{RK}^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \varphi(X_{RK}^n(p)). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Entonces, $\xi^n \in L^2(\Gamma^R)$ y se verifica

$$\|\xi^n\|_{0,2,\Gamma^R} \leq C(T, \mathbf{v}) \Delta t^2 \|\varphi\|_{1,2,G_{t_n}^\delta}. \quad (3.79)$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar descomponemos la función ξ^n en dos

$$\xi^n = \xi_1^n + \xi_2^n, \quad (3.80)$$

siendo

$$\begin{aligned} \xi_1^n(p) &:= \det F^n(p) \left| (F^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \varphi(X_e^n(p)) \\ &\quad - \det F_{RK}^n(p) \left| (F_{RK}^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \varphi(X_e^n(p)), \\ \xi_2^n(p) &:= \det F_{RK}^n(p) \left| (F_{RK}^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \varphi(X_e^n(p)) \\ &\quad - \det F_{RK}^n(p) \left| (F_{RK}^n)^{-T}(p) \mathbf{m}(p) \right| \varphi(X_{RK}^n(p)). \end{aligned}$$

La cota para ξ_1^n se deduce del lema anterior. Por otro lado, aplicando el teorema del valor medio del cálculo diferencial se obtiene

$$\varphi(X_e^n(p)) - \varphi(X_{RK}^n(p)) = \text{grad } \varphi(X_{RK}^n(p) + \sigma(X_e^n(p) - X_{RK}^n(p))) \cdot (X_e^n(p) - X_{RK}^n(p)),$$

para algún $\sigma \in (0, 1)$. Entonces, utilizando (1.142), (1.153) y (3.22) se deduce el resultado. \square

Lema 3.3.12. *Supongamos que $X_e \in \mathbf{C}^3(\overline{\Omega} \times [0, T])$. Sea $\varphi \in C^2(L^2(\Omega))$ y $\xi^{n+\frac{1}{2}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $n \in \{0, \dots, N-1\}$ por*

$$\xi^{n+\frac{1}{2}}(p) := \det F^{n+\frac{1}{2}}(p) \varphi^{n+\frac{1}{2}}(p) - \frac{\det F^{n+1}(p) \varphi^{n+1}(p) + \det F^n(p) \varphi^n(p)}{2}, \quad (3.81)$$

casi por doquier $p \in \Omega$. Entonces, $\xi^{n+\frac{1}{2}} \in L^2(\Omega)$ y se verifica

$$\left\| \xi^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Omega} \leq \Delta t^2 \|\det F \varphi\|_{C^2(L^2(\Omega))}, \quad (3.82)$$

$$\left\| \xi^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Omega} \leq C(T, \mathbf{v}) \Delta t^2 \|\varphi\|_{C^2(L^2(\Omega))}, \quad (3.83)$$

para cada $n \in \{0, \dots, N-1\}$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar introducimos la siguiente función auxiliar

$$G(p, s) = \det F(p, s) \varphi(p, s) \quad \text{c.p.d. } p \in \Omega, \quad s \in [0, T].$$

Utilizando el desarrollo de Taylor de segundo orden con el resto en forma integral de dicha función entorno a $s = t^{n+\frac{1}{2}}$, obtenemos

$$G^{n+\frac{1}{2}}(p) - \frac{G^{n+1}(p) + G^n(p)}{2} = \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \ddot{G}(p, s)(t_n - s) ds - \frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \ddot{G}(p, s)(t_{n+1} - s) ds.$$

Calculamos la derivada segunda de la función G :

$$\ddot{G}(p, s) = ((\det F)')'(p, s) \varphi(p, s) + 2(\det F)'(p, s) \dot{\varphi}(p, s) + \det F(p, s) \ddot{\varphi}(p, s).$$

Utilizando la regularidad de las funciones involucradas se tiene que $G'' \in C^0(L^2(\Omega))$, por lo que $\xi^{n+\frac{1}{2}} \in L^2(\Omega)$ y se verifica (3.82). Además, teniendo en cuenta las igualdades obtenidas y (1.77), (1.78) y (1.101), se deduce que

$$\left\| \xi^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Omega} \leq C(T, \mathbf{v}) \Delta t^2 \|\varphi\|_{C^2(L^2(\Omega))}, \quad (3.84)$$

obteniendo el resultado. \square

Lema 3.3.13. *Asumimos que se verifica la Hipótesis 1.1, y además $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^2(\mathcal{T}^\delta)$, $X_e \in \mathbf{C}^4(\overline{\Omega} \times [0, T])$ y $\Delta t < \eta$, siendo η la constante que aparece en el Lema 1.5.1. Sea $n \in \{0, \dots, N\}$, $\varphi \in H^1(\Omega_{t_n}^\delta)$, siendo $\Omega_{t_n}^\delta$ el conjunto definido en (1.119) y $\xi^n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\xi^n(p) := \det F^n(p) \varphi(X_e^n(p)) - \det F_{RK}^n(p) \varphi(X_{RK}^n(p)). \quad (3.85)$$

casi por doquier $p \in \Omega$. Entonces, $\xi^n \in L^2(\Omega)$ y se verifica

$$\|\xi^n\|_{0,2,\Omega} \leq C(T, \mathbf{v}) \Delta t^2 \|\varphi\|_{1,2,\Omega_{t_n}^\delta}. \quad (3.86)$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar descomponemos la función ξ^n en dos

$$\xi^n = \xi_1^n + \xi_2^n, \quad (3.87)$$

siendo

$$\begin{aligned} \xi_1^n(p) &:= \det F^n(p) \varphi(X_e^n(p)) - \det F_{RK}^n(p) \varphi(X_e^n(p)), \\ \xi_2^n(p) &:= \det F_{RK}^n(p) \varphi(X_e^n(p)) - \det F_{RK}^n(p) \varphi(X_{RK}^n(p)), \end{aligned}$$

casi por doquier $p \in \Omega$. La cota para ξ_1^n se deduce de (3.42). Por otro lado, aplicando el teorema del valor medio del cálculo diferencial se obtiene

$$\varphi(X_e^n(p)) - \varphi(X_{RK}^n(p)) = \text{grad } \varphi(X_{RK}^n(p) + \sigma(X_e^n(p) - X_{RK}^n(p))) \cdot (X_e^n(p) - X_{RK}^n(p)),$$

para algún $\sigma \in (0, 1)$. Entonces, utilizando (3.22) y la primera ecuación de (1.153) se deduce la acotación para ξ_2^n , obteniendo el resultado. \square

A continuación se obtiene una estimación de la diferencia entre el operador continuo, \mathcal{L} (respectivamente, \mathcal{F}), y el discreto, $\mathcal{L}_{\Delta t}$ (respectivamente, $\mathcal{F}_{\Delta t}$), dada en el Lema 3.3.14 (respectivamente, Lema 3.3.15).

Lema 3.3.14. *Asumimos las Hipótesis 1.1, 1.3 y 1.4, además $X_e \in \mathbf{C}^5(\overline{\Omega} \times [0, T])$, y los coeficientes del problema (1.8) verifican:*

$$\mathbf{v} \in \mathbf{C}^3(\mathcal{T}^\delta), \quad \rho_m \in C^2(L^\infty(\Omega)), \quad A \in \mathbb{W}^{2,\infty}(\mathcal{O}^\delta), \quad A_m \in C^2(\mathbb{W}^{1,\infty}(\Omega)),$$

y $\Delta t < \min\{\eta, 1/(2\|\text{grad } \mathbf{v}\|_{0,\infty,\mathcal{T}^\delta})\}$. Supongamos que la solución de (3.20) cumple

$$\phi_m \in C^3(L^2(\Omega)), \quad \nabla \phi_m \in C^2(\mathbf{H}^1(\Omega)), \quad \phi_m|_{\Gamma^R} \in C^2(L^2(\Gamma^R)).$$

Entonces, para cada $n \in \{0, \dots, N-1\}$, existen dos aplicaciones

$$\xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n+\frac{1}{2}} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \quad \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}} : \Gamma^R \longrightarrow \mathbb{R},$$

tales que

$$\left\langle \left(\mathcal{L}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \right) \widehat{\phi}_m, \psi \right\rangle = \left\langle \xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle_{0,\Omega} + \left\langle \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle_{0,\Gamma^R}, \quad (3.88)$$

para todo $\psi \in H_{\Gamma^D}^1(\Omega)$. Además, $\xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n+\frac{1}{2}} \in L^2(\Omega)$ y $\xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}} \in L^2(\Gamma^R)$ y verifican las siguientes estimaciones

$$\begin{aligned} \left\| \xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Omega} &\leq \Delta t^2 \left(C(T, \mathbf{v}, \rho) \|\phi_m\|_{C^3(L^2(\Omega))} + C(T, \mathbf{v}, A) \|\nabla \phi_m\|_{C^2(\mathbf{H}^1(\Omega))} \right), \\ \left\| \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Gamma^R} &\leq \Delta t^2 \left(C(T, \mathbf{v}, A) \|\nabla \phi_m \cdot \mathbf{m}\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))} + C(T, \mathbf{v}, \alpha) \|\phi_m\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))} \right), \end{aligned}$$

siendo $\alpha > 0$ la constante que aparece en la condición Robin de (1.8).

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, dado $\psi \in H_{\Gamma^D}^1(\Omega)$, decomponemos

$$\left\langle \left(\mathcal{L}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \right) \widehat{\phi}_m, \psi \right\rangle = I_1 + I_2 + I_3,$$

siendo

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left\langle \rho \circ X_e^{n+\frac{1}{2}} \det F^{n+\frac{1}{2}} \left(\dot{\phi}_m \right)^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle_{0,\Omega} \\
&\quad - \left\langle \frac{1}{2} (\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n) \frac{\phi_m^{n+1} - \phi_m^n}{\Delta t}, \psi \right\rangle_{0,\Omega}, \\
I_2 &= \left\langle \det F^{n+\frac{1}{2}} \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-1} A \circ X_e^{n+\frac{1}{2}} \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-T} \nabla \phi_m^{n+\frac{1}{2}}, \nabla \psi \right\rangle_{0,\Omega} \\
&\quad - \left\langle \frac{1}{4} \det F_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-1} A \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} (\nabla \phi_m^{n+1} + \nabla \phi_m^n), \nabla \psi \right\rangle_{0,\Omega} \\
&\quad - \left\langle \frac{1}{4} \det F_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-1} A \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} (\nabla \phi_m^{n+1} + \nabla \phi_m^n), \nabla \psi \right\rangle_{0,\Omega} \\
I_3 &= \alpha \left\langle \det F_e^{n+\frac{1}{2}} \left| \left(F_e^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-T} \mathbf{m} \right| \phi_m^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle_{0,\Gamma^R} \\
&\quad - \frac{\alpha}{4} \left\langle \left(\det F_{RK}^{n+1} \left| (F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m} \right| + \det F_{RK}^n \left| (F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m} \right| \right) (\phi_m^{n+1} + \phi_m^n), \psi \right\rangle_{0,\Gamma^R}.
\end{aligned}$$

La cota para I_1 se obtiene aplicando el Lema 3.3.5 con $\varphi = \phi_m$. En efecto, podemos definir una aplicación $\xi_{I_1}^{n+\frac{1}{2}} \in L^2(\Omega)$ tal que

$$I_1 = \left\langle \xi_{I_1}^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle_{0,\Omega}, \quad \text{con} \quad \left\| \xi_{I_1}^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Omega} \leq C(T, \mathbf{v}, \rho) \Delta t^2 \|\phi_m\|_{C^3(L^2(\Omega))}. \quad (3.89)$$

Para obtener una estimación de I_2 , descomponemos dicho término en tres, $I_2 = I_2^1 + I_2^2 + I_2^3$, con

$$\begin{aligned}
I_2^1 &= \left\langle \det F^{n+\frac{1}{2}} \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-1} A \circ X_e^{n+\frac{1}{2}} \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-T} \nabla \phi_m^{n+\frac{1}{2}}, \nabla \psi \right\rangle_{0,\Omega} \\
&\quad - \left\langle \frac{1}{4} \det F^{n+1} (F^{n+1})^{-1} A \circ X_e^{n+1} (F^{n+1})^{-T} (\nabla \phi_m^{n+1} + \nabla \phi_m^n), \nabla \psi \right\rangle_{0,\Omega} \\
&\quad - \left\langle \frac{1}{4} \det F^n (F^n)^{-1} A \circ X_e^n (F^n)^{-T} (\nabla \phi_m^{n+1} + \nabla \phi_m^n), \nabla \psi \right\rangle_{0,\Omega}, \\
I_2^2 &= \frac{1}{4} \left\langle \det F^{n+1} (F^{n+1})^{-1} A \circ X_e^{n+1} (F^{n+1})^{-T} (\nabla \phi_m^{n+1} + \nabla \phi_m^n), \nabla \psi \right\rangle_{0,\Omega} \\
&\quad - \frac{1}{4} \left\langle \det F_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-1} A \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} (\nabla \phi_m^{n+1} + \nabla \phi_m^n), \nabla \psi \right\rangle_{0,\Omega}, \\
I_2^3 &= \frac{1}{4} \left\langle \det F^n (F^n)^{-1} A \circ X_e^n (F^n)^{-T} (\nabla \phi_m^{n+1} + \nabla \phi_m^n), \nabla \psi \right\rangle_{0,\Omega} \\
&\quad - \frac{1}{4} \left\langle \det F_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-1} A \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} (\nabla \phi_m^{n+1} + \nabla \phi_m^n), \nabla \psi \right\rangle_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

Utilizando los Lemas 3.3.6 y 3.3.7 con $\mathbf{w} = \nabla \phi_m$ y $\mathbf{w} = \nabla \phi_m^{n+1} + \nabla \phi_m^n$, respectivamente, se deduce que

$$I_2 = \left\langle \mathbf{u}_{I_2^1}^{n+\frac{1}{2}}, \nabla \psi \right\rangle_{0,\Omega} + \left\langle \mathbf{u}_{I_2^2}^{n+1}, \nabla \psi \right\rangle_{0,\Omega} + \left\langle \mathbf{u}_{I_2^3}^n, \nabla \psi \right\rangle_{0,\Omega},$$

con $\mathbf{u}_{I_2^1}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{u}_{I_2^2}^{n+1}, \mathbf{u}_{I_2^3}^n \in \mathbf{H}^1(\Omega)$. Entonces, aplicando la fórmula de Green se tiene

$$I_2 = \left\langle \left(\mathbf{u}_{I_2^1}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{u}_{I_2^2}^{n+1} + \mathbf{u}_{I_2^3}^n \right) \cdot \mathbf{m}, \psi \right\rangle_{0,\Gamma^R} - \left\langle \text{Div} \left(\mathbf{u}_{I_2^1}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{u}_{I_2^2}^{n+1} + \mathbf{u}_{I_2^3}^n \right), \psi \right\rangle_{0,\Omega}.$$

Además, las funciones involucradas se acotan como sigue

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{u}_{I_2^1}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{m} \right\|_{0,2,\Gamma^R} &\leq C(T, \mathbf{v}, A) \Delta t^2 \|\nabla \phi_m \cdot \mathbf{m}\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))}, \\ \left\| \mathbf{u}_{I_2^i}^m \cdot \mathbf{m} \right\|_{0,2,\Gamma^R} &\leq C(T, \mathbf{v}, A) \Delta t^2 \|\nabla \phi_m \cdot \mathbf{m}\|_{C^0(L^2(\Gamma^R))}, \\ \left\| \text{Div} \mathbf{u}_{I_2^1}^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Omega} &\leq C(T, \mathbf{v}, A) \Delta t^2 \|\nabla \phi_m\|_{C^2(\mathbf{H}^1(\Omega))} \\ \left\| \text{Div} \mathbf{u}_{I_2^i}^m \right\|_{0,2,\Omega} &\leq C(T, \mathbf{v}, A) \Delta t^2 \|\nabla \phi_m\|_{C^0(\mathbf{H}^1(\Omega))}. \end{aligned}$$

siendo $i = 2, 3$ y $m = n, n+1$. Por lo tanto, podemos escribir

$$I_2 = \left\langle \xi_{I_2^A}^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle_{0,\Omega} + \left\langle \xi_{I_2^B}^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle_{0,\Gamma^R}, \quad (3.90)$$

con $\xi_{I_2^A}^{n+\frac{1}{2}} \in L^2(\Omega)$ y $\xi_{I_2^B}^{n+\frac{1}{2}} \in L^2(\Gamma^R)$ tales que

$$\left\| \xi_{I_2^A}^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Omega} \leq C(T, \mathbf{v}, A) \Delta t^2 \|\nabla \phi_m\|_{C^2(\mathbf{H}^1(\Omega))}, \quad (3.91)$$

$$\left\| \xi_{I_2^B}^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Gamma^R} \leq C(T, \mathbf{v}, A) \Delta t^2 \|\nabla \phi_m \cdot \mathbf{m}\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))}. \quad (3.92)$$

Para obtener una estimación de I_3 descomponemos dicho término en tres $I_3 = I_3^1 + I_3^2 + I_3^3$ con

$$\begin{aligned} I_3^1 &= \alpha \left\langle \det F^{n+\frac{1}{2}} \left| (F^{n+\frac{1}{2}})^{-T} \mathbf{m} \right| \phi_m^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle_{0,\Gamma^R} \\ &\quad - \frac{\alpha}{4} \left\langle \left(\det F^{n+1} \left| (F^{n+1})^{-T} \mathbf{m} \right| + \det F^n \left| (F^n)^{-T} \mathbf{m} \right| \right) (\phi_m^{n+1} + \phi_m^n), \psi \right\rangle_{0,\Gamma^R}, \\ I_3^2 &= \frac{\alpha}{4} \left\langle \left(\det F^{n+1} \left| (F^{n+1})^{-T} \mathbf{m} \right| - \det F_{RK}^{n+1} \left| (F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m} \right| \right) (\phi_m^{n+1} + \phi_m^n), \psi \right\rangle_{0,\Gamma^R} \\ I_3^3 &= \frac{\alpha}{4} \left\langle \left(\det F^n \left| (F^n)^{-T} \mathbf{m} \right| - \det F_{RK}^n \left| (F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m} \right| \right) (\phi_m^{n+1} + \phi_m^n), \psi \right\rangle_{0,\Gamma^R}. \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 3.3.8 y el Lema 3.3.10 con $\varphi = \alpha \phi_m|_{\Gamma^R}$ y $\varphi = \alpha(\phi_m^{n+1} + \phi_m^n)|_{\Gamma^R}$, respectivamente, se deduce que

$$I_3 = \left\langle \xi_{I_3^1}^{n+\frac{1}{2}} + \xi_{I_3^2}^{n+1} + \xi_{I_3^3}^n, \psi \right\rangle_{0,\Gamma^R},$$

con $\xi_{I_3^1}^{n+\frac{1}{2}}, \xi_{I_3^2}^{n+1}, \xi_{I_3^3}^n \in L^2(\Gamma^R)$ y tales que

$$\begin{aligned} \left\| \xi_{I_3^1}^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Gamma^R} &\leq C(T, \mathbf{v}) \alpha \Delta t^2 \|\phi_m\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))}, \\ \left\| \xi_{I_3^i}^m \right\|_{0,2,\Gamma^R} &\leq C(T, \mathbf{v}) \alpha \Delta t^2 \|\phi_m\|_{C^0(L^2(\Gamma^R))}, \end{aligned}$$

siendo $i = 2, 3$ y $m = n, n+1$. Por lo tanto, podemos escribir

$$I_3 = \left\langle \xi_{I_3}^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle_{0,\Gamma^R} \quad (3.93)$$

con

$$\left\| \xi_{I_3}^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Gamma^R} \leq C(T, \mathbf{v}) \alpha \Delta t^2 \|\phi_m\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))}. \quad (3.94)$$

Finalmente el resultado se obtiene de (3.89), (3.90), (3.91), (3.92), (3.93) y (3.94). \square

Lema 3.3.15. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 1.1, 1.5 y 1.6, y $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^2(\mathcal{T}^\delta)$, $X_e \in \mathbf{C}^4(\overline{\Omega} \times [0, T])$ y $\Delta t < \min\{\eta, 1/(2\|\text{grad } \mathbf{v}\|_{0,\infty,\mathcal{T}^\delta})\}$, siendo η la constante que aparece en el Lema 1.5.1. Además, los datos f y g verifican*

$$f_m \in C^2(L^2(\Omega)), \quad f \in C^1(\mathcal{T}^\delta), \quad g_m \in C^2(L^2(\Gamma^R)), \quad g \in C^1(\mathcal{T}_{\Gamma^R}^\delta).$$

Entonces, para cada $n \in \{0, \dots, N-1\}$, existen dos aplicaciones

$$\xi_f^{n+\frac{1}{2}} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \xi_g^{n+\frac{1}{2}} : \Gamma^R \longrightarrow \mathbb{R},$$

tales que

$$\left\langle \left(\mathcal{F}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \right), \psi \right\rangle = \left\langle \xi_f^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle_{0,\Omega} + \left\langle \xi_g^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle_{0,\Gamma^R}, \quad (3.95)$$

para todo $\psi \in H^1(\Omega)$. Además, $\xi_f^{n+\frac{1}{2}} \in L^2(\Omega)$ y $\xi_g \in L^2(\Gamma^R)$ y verifican las siguientes estimaciones

$$\begin{aligned} \left\| \xi_f^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Omega} &\leq \Delta t^2 \left(\|\det F f_m\|_{C^2(L^2(\Omega))} + C(T, \mathbf{v}, \mathcal{T}^\delta) \|f\|_{C^1(\mathcal{T}^\delta)} \right), \\ \left\| \xi_g^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Gamma^R} &\leq \Delta t^2 \left(\|\det F |F^{-T} \mathbf{m}| g_m\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))} + C(T, \mathbf{v}, \mathcal{T}_{\Gamma^R}^\delta) \|g\|_{C^1(\mathcal{T}_{\Gamma^R}^\delta)} \right), \end{aligned}$$

siendo \tilde{c} una constante independiente de Δt .

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar recordemos que se tiene

$$\begin{aligned} &\left\langle \left(\mathcal{F}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \right), \psi \right\rangle \\ &= \left\langle \det F^{n+\frac{1}{2}} f^{n+\frac{1}{2}} \circ X_e^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\det F_{RK}^{n+1} f^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n f^n \circ X_{RK}^n}{2}, \psi \right\rangle_{0,\Omega} \\ &+ \left\langle \det F^{n+\frac{1}{2}} \left| \left(F^{n+\frac{1}{2}} \right)^{-T} \mathbf{m} \right| g^{n+\frac{1}{2}} \circ X_e^{n+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\det F_{RK}^{n+1} \left| (F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m} \right| g^{n+1} \circ X_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n \left| (F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m} \right| g^n \circ X_{RK}^n}{2}, \psi \right\rangle_{0,\Gamma^R}, \end{aligned}$$

para todo $\psi \in H^1(\Omega)$. Entonces, el resultado se deduce facilmente procediendo de la siguiente manera

- Descomponemos cada uno de los sumandos a la derecha de la igualdad en tres, análogamente a como hicimos en la demostración del lema previo con los términos I_2 e I_3 .
- Aplicamos el Lema 3.3.12 con $\varphi = f_m$, el Lema 3.3.13 con $\varphi = f^n, f^{n+1}$, el Lema 3.3.9 con $\varphi = g_m$ y el Lema 3.3.11 con $\varphi = g^n, g^{n+1}$.

□

Los lemas que hemos establecido en esta sección requieren además de las Hipótesis 1.1, 1.3, 1.4, 1.5 y 1.6, de las siguientes

Hipótesis 3.2. *Las aplicaciones ρ , \mathbf{v} , A , f y g del problema (1.8) verifican*

- $\rho_m \in C^2(L^\infty(\Omega))$, $A \in \mathbb{W}^{2,\infty}(\mathcal{O}^\delta)$, $A_m \in C^2(\mathbb{W}^{1,\infty}(\Omega))$,

- $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^3(\mathcal{T}^\delta)$,
- $f_m \in C^2(L^2(\Omega))$, $f \in C^1(\mathcal{T}^\delta)$, $g_m \in C^2(L^2(\Gamma^R))$, $g \in C^1(\mathcal{T}_{\Gamma^R}^\delta)$ y $\alpha > 0$.

Teorema 3.3.1. *Asumimos las Hipótesis 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 2.1 y 3.2, además $X_e \in \mathbf{C}^5(\overline{\Omega} \times [0, T])$. Supongamos que la solución de (3.20) cumple*

$$\phi_m \in C^3(L^2(\Omega)), \quad \nabla \phi_m \in C^2(\mathbf{H}^1(\Omega)), \quad \phi_m|_{\Gamma^R} \in C^2(L^2(\Gamma^R)),$$

y $\widehat{\phi_{m,\Delta t}}$ es la solución de (2.1) sujeta a la condición inicial $\phi_{m,\Delta t}^0 = \phi_m^0 = \phi^0 \in H^1(\Omega)$. Entonces existen dos constantes positivas J y D , tales que si $\Delta t < D$, se verifica

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \|\sqrt{\det F_{RK}} (\phi_m - \phi_{m,\Delta t})\|_{l^\infty(L^2(\Omega))} + \sqrt{\frac{\Lambda}{4}} \left\| B(F_{RK})^{-T} \mathcal{S} [\nabla \widehat{\phi_m} - \nabla \phi_{m,\Delta t}] \sqrt{\det F_{RK}} \right\|_{l^2(L^2(\Omega))} \\ & + \sqrt{\frac{\alpha}{8}} \left\| \sqrt{\mathcal{S} [(F_{RK})^{-T} \mathbf{m} | \det F_{RK}] \mathcal{S} [\phi_m - \phi_{m,\Delta t}]} \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} \leq J \Delta t^2 (\|\phi_m\|_{C^3(L^2(\Omega))} \\ & \quad + \|\nabla \phi_m\|_{C^2(\mathbf{H}^1(\Omega))} + \|\nabla \phi_m \cdot \mathbf{m}\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))} + \|\phi_m\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))} \\ & \quad + \|\det F f_m\|_{C^2(L^2(\Omega))} + \|f\|_{C^1(\mathcal{T}^\delta)} + \|\det F |F^{-T} \mathbf{m}| g_m\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))} + \|g\|_{C^1(\mathcal{T}_{\Gamma^R}^\delta)}). \end{aligned} \quad (3.96)$$

DEMOSTRACIÓN. Denotamos por $\widehat{e_{m,\Delta t}}$ la sucesión diferencia entre la solución continua y la solución discreta, es decir, $\widehat{e_{m,\Delta t}} = \left\{ \phi_m^n - \phi_{m,\Delta t}^n \right\}_{n=0}^N$. Entonces, usando (2.1) y (3.20) se tiene

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{e_{m,\Delta t}}, \psi \right\rangle &= \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\phi_m}, \psi \right\rangle - \left\langle \mathcal{L}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\phi_m}, \psi \right\rangle + \left\langle \mathcal{L}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\phi_m}, \psi \right\rangle - \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\phi_{m,\Delta t}}, \psi \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{L}^{n+\frac{1}{2}} \right) \widehat{\phi_m}, \psi \right\rangle + \left\langle \mathcal{F}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle, \end{aligned}$$

para todo $\psi \in \mathcal{W}$ y $0 \leq n \leq N-1$. Por tanto, teniendo en cuenta los Lemas 3.3.14 y 3.3.15, se deduce

$$\left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{e_{m,\Delta t}}, \psi \right\rangle = \left\langle \xi_f^{n+\frac{1}{2}} - \xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle_{0,\Omega} + \left\langle \xi_g^{n+\frac{1}{2}} - \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle_{0,\Gamma^R} \quad \forall \psi \in \mathcal{W},$$

con $\xi_f^{n+\frac{1}{2}}, \xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n+\frac{1}{2}} \in L^2(\Omega)$ y $\xi_g^{n+\frac{1}{2}}, \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}} \in L^2(\Gamma^R)$. Entonces, la sucesión $\widehat{e_{m,\Delta t}}$ es solución del problema (3.1) con condición inicial cero y con las siguientes sucesiones correspondientes al segundo miembro

$$S^{n+1} = \xi_f^{n+\frac{1}{2}} - \xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n+\frac{1}{2}}, \quad G^{n+1} = \xi_g^{n+\frac{1}{2}} - \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Por consiguiente, aplicando el Teorema 3.2.1 se obtiene

$$\begin{aligned} & \sqrt{\gamma} \|\sqrt{\det F_{RK}} e_{m,\Delta t}\|_{l^\infty(L^2(\Omega))} + \sqrt{\frac{\Lambda}{4}} \left\| B F_{RK}^{-T} \mathcal{S} [\nabla \widehat{e_{m,\Delta t}}] \sqrt{\det F_{RK}} \right\|_{l^2(L^2(\Omega))} \\ & + \sqrt{\frac{\alpha}{8}} \left\| \sqrt{\mathcal{S} [|F_{RK}^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}] \mathcal{S} [e_{m,\Delta t}]} \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} \leq J \left(\left\| \widehat{\xi_{\mathcal{L}_\Omega}} \right\|_{l^2(L^2(\Omega))} + \left\| \widehat{\xi_f} \right\|_{l^2(L^2(\Omega))} \right. \\ & \quad \left. + \left\| \widehat{\xi_{\mathcal{L}_\Gamma}} \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} + \left\| \widehat{\xi_g} \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} \right), \end{aligned} \quad (3.97)$$

donde hemos utilizado que $e_{m,\Delta t}^0 = 0$. Finalmente, el resultado se deduce usando las cotas para $\xi_{\mathcal{L}_\Omega}$, ξ_f , $\xi_{\mathcal{L}_\Gamma}$ y ξ_g dadas en los Lemas 3.3.14 y 3.3.15. \square

Nota 3.3.1. Nótese que la constante J del Teorema 3.2.1 y las constantes que aparecen en las acotaciones de ξ_f y ξ_g son independiente de A ; además, las constantes presentes en las estimaciones de $\xi_{\mathcal{L}_\Omega}$ y $\xi_{\mathcal{L}_\Gamma}$ están acotadas conforme A tiende a cero. Por tanto, la constante J del Teorema 3.3.1 también se mantiene acotada cuando A tiende a cero. Entonces, el Teorema 3.3.1 proporciona una estimación del error temporal en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ de orden $O(\Delta t^2)$ que es válida para todo coeficiente tensorial de difusión, incluso para $A = 0$, y cuya constante se mantiene acotada cuando A tiende a cero.

El teorema que viene a continuación necesita hipótesis más fuertes sobre el dato A y g que las asumidas en el Teorema 3.3.1, concretamente:

Hipótesis 3.3. Las aplicaciones ρ , \mathbf{v} , A , f y g del problema (1.8) verifican

- $\rho_m \in C^2(L^\infty(\Omega))$, $A \in \mathbb{W}^{2,\infty}(\mathcal{O}^\delta)$, $A_m \in C^3(\mathbb{W}^{1,\infty}(\Omega))$,
- $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^3(\mathcal{T}^\delta)$,
- $f_m \in C^2(L^2(\Omega))$, $f \in C^1(\mathcal{T}^\delta)$, $g_m \in C^3(L^2(\Gamma^R))$, $g \in C^2(\mathcal{T}_{\Gamma^R}^\delta)$ y $\alpha > 0$.

Teorema 3.3.2. Asumimos las Hipótesis 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 2.1 y 3.3, además $X_e \in \mathbf{C}^5(\bar{\Omega} \times [0, T])$. Supongamos que la solución de (3.20) cumple

$$\phi_m \in C^3(L^2(\Omega)), \quad \nabla \phi_m \in C^3(\mathbf{H}^1(\Omega)), \quad \phi_m|_{\Gamma^R} \in C^3(L^2(\Gamma^R)),$$

y $\widehat{\phi_{m,\Delta t}}$ es la solución de (2.1) sujeta a la condición inicial $\phi_{m,\Delta t}^0 = \phi_m^0 \in H^1(\Omega)$. Entonces existen dos constantes positivas J y D tal que si $\Delta t < D$ se verifica

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\gamma}{4}} \left\| \sqrt{\mathcal{S}[\det F_{RK}]} \widehat{\mathcal{R}_{\Delta t}[\phi_m - \phi_{m,\Delta t}]} \right\|_{l^2(L^2(\Omega))} + \sqrt{\frac{\Lambda}{2}} \left\| B(F_{RK})^{-T} (\nabla \widehat{\phi_m} - \nabla \phi_{m,\Delta t}) \sqrt{\det F_{RK}} \right\|_{l^\infty(L^2(\Omega))} \\ & + \sqrt{\frac{\alpha}{4}} \left\| \sqrt{|(F_{RK})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}} \widehat{(\phi_m - \phi_{m,\Delta t})} \right\|_{l^\infty(L^2(\Gamma^R))} \leq J \Delta t^2 (\|\phi_m\|_{C^3(L^2(\Omega))} \\ & \quad + \|\nabla \phi_m\|_{C^2(\mathbf{H}^1(\Omega))} + \|\nabla \phi_m \cdot \mathbf{m}\|_{C^3(L^2(\Gamma^R))} + \|\phi_m\|_{C^3(L^2(\Gamma^R))} \\ & \quad + \|\det F f_m\|_{C^2(L^2(\Omega))} + \|f\|_{C^1(\mathcal{T}^\delta)} + \|\det F |F^{-T} \mathbf{m}| g_m\|_{C^3(L^2(\Gamma^R))} + \|g\|_{C^2(\mathcal{T}_{\Gamma^R}^\delta)}). \end{aligned} \quad (3.98)$$

DEMOSTRACIÓN. Procediendo como en la demostración del Teorema 3.3.1 y utilizando la notación introducida en dicho teorema, se deduce

$$\left\langle \widehat{\mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} e_{m,\Delta t}}, \psi \right\rangle = \left\langle \xi_f^{n+\frac{1}{2}} - \xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle_{0,\Omega} + \left\langle \xi_g^{n+\frac{1}{2}} - \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle_{0,\Gamma^R} \quad \forall \psi \in \mathcal{W},$$

con $\xi_f^{n+\frac{1}{2}}, \xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n+\frac{1}{2}} \in L^2(\Omega)$ y $\xi_g^{n+\frac{1}{2}}, \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}} \in L^2(\Gamma^R)$. Entonces, la sucesión $\widehat{e_{m,\Delta t}}$ es solución del problema (3.1) con condición inicial cero y con las siguientes sucesiones correspondientes al segundo miembro

$$S^{n+1} = \xi_f^{n+\frac{1}{2}} - \xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n+\frac{1}{2}}, \quad G^{n+1} = \xi_g^{n+\frac{1}{2}} - \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Por consiguiente, aplicando el Teorema 3.2.2 se obtiene

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\gamma}{4}} \left\| \sqrt{\mathcal{S}[\det F_{RK}]} \widehat{\mathcal{R}_{\Delta t}[e_{m,\Delta t}]} \right\|_{l^2(L^2(\Omega))} + \sqrt{\frac{\Lambda}{2}} \left\| B(F_{RK})^{-T} \widehat{\nabla e_{m,\Delta t}} \sqrt{\det F_{RK}} \right\|_{l^\infty(L^2(\Omega))} \\ & + \sqrt{\frac{\alpha}{4}} \left\| \sqrt{|(F_{RK})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}} \widehat{e_{m,\Delta t}} \right\|_{l^\infty(L^2(\Gamma^R))} \leq \tilde{e} \left(\left\| \widehat{\xi_{\mathcal{L}_\Omega}} \right\|_{l^2(L^2(\Omega))} + \left\| \widehat{\xi_f} \right\|_{l^2(L^2(\Omega))} \right. \\ & \quad \left. + \left\| \widehat{\xi_{\mathcal{L}_\Gamma}} \right\|_{l^\infty(L^2(\Gamma^R))} + \left\| \widehat{\xi_g} \right\|_{l^\infty(L^2(\Gamma^R))} + \left\| \widehat{\mathcal{R}_{\Delta t}[\xi_{\mathcal{L}_\Gamma}]} \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} + \left\| \widehat{\mathcal{R}_{\Delta t}[\xi_g]} \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} \right), \end{aligned} \quad (3.99)$$

donde hemos utilizado que $e_{m,\Delta t}^0 = 0$. Finalmente, el resultado se deduce utilizando las cotas para $\xi_{\mathcal{L}_\Omega}$, ξ_f , $\xi_{\mathcal{L}_\Gamma}$ y ξ_g dadas en los Lemas 3.3.14 y 3.3.15 y teniendo en cuenta la siguiente observación:

- Las sucesiones $\widehat{\xi_{\mathcal{L}_\Gamma}}$ y $\widehat{\xi_g}$ se pueden descomponer de la siguiente manera

$$\widehat{\xi_{\mathcal{L}_\Gamma}} = \widehat{\varphi_{\mathcal{L}_\Gamma}} + \widehat{\mu_{\mathcal{L}_\Gamma}}, \quad \widehat{\xi_g} = \widehat{\varphi_g} + \widehat{\mu_g},$$

con

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{L}_\Gamma}^n &= \varphi_{\mathcal{L}_\Gamma}(t_n) \quad \text{siendo } \varphi_{\mathcal{L}_\Gamma} \in C^1(L^2(\Gamma^R)), \\ \varphi_g^n &= \varphi_g(t_n) \quad \text{siendo } \varphi_g \in C^1(L^2(\Gamma^R)), \end{aligned} \quad (3.100)$$

para $1 \leq n \leq N$. Además se verifican las siguientes cotas

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \varphi_{\mathcal{L}_\Gamma}}{\partial t} \right\|_{C^0(L^2(\Gamma^R))} &\leq \Delta t^2 \left(C(T, \mathbf{v}, A) \|\nabla \phi_m \cdot \mathbf{m}\|_{C^3(L^2(\Gamma^R))} + \alpha C(T, \mathbf{v}) \|\phi_m\|_{C^3(L^2(\Gamma^R))} \right), \\ \left\| \mu_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+1} - \mu_{\mathcal{L}_\Gamma}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R} &\leq \Delta t^3 \left(C(T, \mathbf{v}, A) \|\nabla \phi_m \cdot \mathbf{m}\|_{C^1(L^2(\Gamma^R))} + C(T, \mathbf{v}) \alpha \|\phi_m\|_{C^1(L^2(\Gamma^R))} \right), \\ \left\| \frac{\partial \varphi_g}{\partial t} \right\|_{C^0(L^2(\Gamma^R))} &\leq \Delta t^2 \left\| \det F |F^{-T} \mathbf{m}| g_m \right\|_{C^3(L^2(\Gamma^R))}, \\ \left\| \mu_g^{n+1} - \mu_g^n \right\|_{0,2,\Gamma^R} &\leq \Delta t^3 C(T, \mathbf{v}, \mathcal{T}_{\Gamma^R}^\delta) \|g\|_{C^2(\mathcal{T}_{\Gamma^R}^\delta)}, \end{aligned}$$

para $1 \leq n \leq N-1$. Para obtener estas estimaciones es suficiente observar que se verifican

$$\begin{aligned} G^{n+\frac{1}{2}}(p) - \frac{G^{n+1}(p) + G^n(p)}{2} &= \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \ddot{G}(p, s)(t_n - s) ds - \frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \ddot{G}(s)(t_{n+1} - s) ds, \\ |(X_e^{n+1}(p) - X_{RK}^{n+1}) - (X_e^n(p) - X_{RK}^n)| &\leq \tilde{C} \Delta t^3, \\ |(F^{n+1}(p) - F_{RK}^{n+1}) - (F^n(p) - F_{RK}^n)| &\leq \tilde{C} \Delta t^3, \\ |(\det F^{n+1}(p) - \det F_{RK}^{n+1}) - (\det F^n(p) - \det F_{RK}^n)| &\leq \tilde{C} \Delta t^3, \end{aligned}$$

para todo $p \in \overline{\Omega}$ y para toda función $G \in C^2(L^2(\Gamma^R))$. Entonces, utilizando la Observación 3.2.1 se deducen las acotaciones para

$$\left\| \widehat{\mathcal{R}_{\Delta t}[\xi_{\mathcal{L}_\Gamma}]} \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} + \left\| \widehat{\mathcal{R}_{\Delta t}[\xi_g]} \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))}.$$

□

Nota 3.3.2. Nótese que la constante J del Teorema 3.2.1 puede tender a infinito conforme Λ tiende a cero y, como consecuencia, también puede tender a infinito la constante J del Teorema 3.3.2. Este inconveniente se puede solventar restringiendo el espacio del coeficiente (tensorial) de difusión, análogamente a como hicimos en la Observación 2.4.2. En efecto, dado $\nu > 0$, introducimos el conjunto

$$\mathcal{C}_\nu := \left\{ A : \mathcal{O}^\delta \longrightarrow \text{Lin}, \text{ } A \text{ verifica la Hipótesis 1.4 y } \frac{c_A}{\Lambda} \leq \nu \right\}.$$

Recordemos que Λ es una cota inferior uniforme de los autovalores de A_{n_1} y c_A está definida en (2.2). Entonces, tomando A en este conjunto las constantes J se mantienen acotadas. En particular, si $A = \varepsilon B \in \mathcal{C}_1$, las constantes J de los Teoremas 3.2.1 y 3.3.2 están acotadas cuando ε tiende a cero.

Capítulo 4

Estimación de error para la discretización total. Resultados Numéricos

4.1. Introducción

Los métodos de características aplicados a las ecuaciones de convección-difusión se combinan con diferentes discretizaciones espaciales, por ejemplo, elementos finitos ([38], [63]), diferencias finitas ([38]), elementos finitos espectrales ([7]), etc. En este capítulo combinamos el método de características con el método de elementos finitos.

Existe numerosa bibliografía que estudia matemáticamente el método clásico de características combinado con elementos finitos, para resolver ecuaciones de convección-difusión. Si Δt denota el paso temporal, h el paso espacial y k el grado del espacio de elementos finitos, en [77] se obtienen estimaciones de error de la forma $O(h^k + \Delta t)$ en norma $l^\infty(L^2(\mathbb{R}^d))$ (d denota la dimensión del dominio espacial). En [63] se prueban estimaciones de error de la forma $O(h^k + \Delta t + k^{k+1}/\Delta t)$ en el espacio $l^\infty(L^2(\Omega))$ bajo la hipótesis de que la componente normal de la velocidad se anula sobre la frontera del dominio espacial Ω . Todas estas estimaciones involucran constantes que dependen de la norma de la solución. En [12] se obtienen estimaciones con constantes que dependen sólo de los datos, para elementos finitos lineales y una velocidad que se anula sobre la frontera. En concreto, se tiene convergencia de orden $O(h^2 + \min(h, h^2/\Delta t) + \Delta t)$ en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$.

En la literatura también se han estudiado métodos de características de segundo orden combinados con métodos de elementos finitos, por ejemplo en [19], [20] y [71] se obtiene convergencia de orden $O(\Delta t^2 + h^k)$ para el método de características (1.63) tomando $\theta = 1/2$.

En [29] se analizan dos métodos, uno Lagrangiano y otro semi-Lagrangiano para problemas de convección-difusión. Se obtienen estimaciones de error para el método Lagrangiano semidiscretizado en espacio utilizando elementos finitos; y también para el análogo semi-Lagrangiano discretizado en tiempo y espacio usando un método de elementos finitos discontinuos. Las estimaciones obtenidas están expresadas en términos de operadores de proyección con constantes independientes de la difusión cuando la velocidad se calcula exactamente.

En la primera parte de este capítulo continuamos con el análisis del Capítulo 3, obteniendo estimaciones de error en norma $l^\infty(H^1(\Omega))$ de orden $O(\Delta t^2 + h^k)$. Concretamente, en primer lugar obtenemos una acotación para la norma $l^\infty(L^2(\Omega))$, con constantes que se mantienen acotadas en el límite hipérbolico; y posteriormente se obtiene la estimación para el gradiente del error.

En general los productos interiores presentes en la formulación de Galerkin no se pueden calcular exactamente. Por tanto, en la práctica, se aproximan usando integración numérica. Como consecuencia de la integración numérica aparecen nuevos términos en las estimaciones de error, que en algunos casos ocasionan la pérdida de estabilidad incondicional. En la bibliografía se estudia la influencia de las fórmulas de cuadratura mayoritariamente para el método clásico de Lagrange-Galerkin con elementos finitos lineales. Concretamente, en [55] se prueba que para las fórmulas de Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto (de más de tres puntos), Radau y Newton-Cotes el método resulta condicionalmente inestable aplicado a la ecuación de convección lineal. Este resultado se extiende en [77] a la ecuación de convección-difusión lineal y en [66] a más tipos de fórmulas de cuadratura. Tanto para la ecuación de convección como para la ecuación de convección-difusión las fórmulas de Gauss-Lobatto son las que proporcionan los métodos más estables. Sin embargo, sólo la regla del trapecio conserva la estabilidad incondicional. En [42] se hace un análisis de Fourier para el método clásico y el método de dos pasos, combinados con fórmulas de cuadratura de Gauss-Legendre y aplicados a la ecuación de convección lineal unidimensional. Los resultados que se obtienen reflejan que el método de dos pasos es más inestable que el clásico. En [78] se muestra experimentalmente que el método de Crank-Nicholson es más robusto, respecto al error de integración numérica, que el método de primer orden. En [20] se extiende el análisis obteniendo resultados de estabilidad incondicional; para ello se desarrolla un análisis de Fourier.

En este capítulo, obtenemos la convergencia del método totalmente discretizado de orden $O(\Delta t^2 + h^k)$ en norma $l^\infty(H^1(\Omega))$, primeramente para el error en coordenadas materiales y posteriormente para el error en coordenadas espaciales.

Por último, se presentan los resultados numéricos obtenidos con diferentes métodos de características. Verificamos los órdenes de convergencia conseguidos para el método de Crank-Nicholson Lagrangiano. Además, analizamos numéricamente la influencia de las fórmulas de cuadratura para distintos métodos de características.

4.2. Discretización espacial : método de elementos finitos

Proponemos una discretización espacial utilizando un espacio de elementos finitos $V_h^k \subset H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$, donde h denota el parámetro de discretización del mallado y el entero $k \geq 1$ es el grado de aproximación en el siguiente sentido:

Hipótesis 4.1. *Existe un operador de interpolación $\pi_h : C^0(\overline{\Omega}) \longrightarrow V_h^k$ que verifica*

$$\|\pi_h \psi - \psi\|_{s,2,\Omega} \leq Q h^{r-s} \|\psi\|_{r,2,\Omega} \quad \forall \psi \in C^0(\overline{\Omega}) \cap H^r(\Omega) \quad 0 \leq r \leq k+1, \quad s = 0, 1, \quad (4.1)$$

para una constante positiva Q independiente de h .

Introducimos el problema totalmente discreto de (1.171).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } \phi_{m,\Delta t,h}^0 \in V_h^k, \text{ encontrar } \widehat{\phi_{m,\Delta t,h}} = \{\phi_{m,\Delta t,h}^n\}_{n=1}^N \in [V_h^k]^N \text{ tal que} \\ \frac{1}{\Delta t} \langle \mathcal{D}_{\Delta t}^{n,\frac{1}{2},RK}[\widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}], \psi_h \rangle_{0,\Omega} + \langle \mathcal{M}_{\Delta t}^{n,\frac{1}{2},RK}[\widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}], \psi_h \rangle = \langle \mathcal{N}_{\Delta t}^{n,\frac{1}{2},RK}, \psi_h \rangle \\ \text{para todo } \psi_h \in V_h^k \text{ y } n = 0, \dots, N-1. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

4.3. Análisis del método de Lagrange-Galerkin de Crank-Nicholson

El objetivo de esta sección es obtener estimaciones de error para el método totalmente discretizado. Concretamente, en primer lugar obtenemos convergencia del método con orden $O(\Delta t^2 + h^k)$ en norma

$l^\infty(L^2(\Omega))$, y posteriormente se obtiene una estimación de orden $O(\Delta t^2 + h^k)$ en norma $l^\infty(\mathbf{L}^2(\Omega))$ para el gradiente del error.

4.3.1. Estabilidad del método totalmente discretizado

Utilizando la notación introducida en la Sección 2.2, el problema totalmente discreto se escribe

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } \phi_{m,\Delta t,h}^0 \in V_h^k, \text{ encontrar } \widehat{\phi_{m,\Delta t,h}} = \{\phi_{m,\Delta t,h}^n\}_{n=1}^N \in [V_h^k]^N \text{ tal que} \\ \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}[\widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}], \psi_h \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}, \psi_h \right\rangle \\ \text{para todo } \psi_h \in V_h^k \text{ y } n = 0, \dots, N-1. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Tomando $\mathcal{W} = V_h^k$ en el problema (1.171) y aplicando el Teorema 1.5.1 se deduce que, bajo las hipótesis de dicho teorema, el problema (4.3) tiene una única solución $\widehat{\phi_{m,\Delta t,h}} \in [V_h^k]^N$. Análogamente, aplicando los Teoremas 2.3.1 y 2.4.1 se obtienen los resultados de estabilidad para el problema totalmente discreto. Concretamente:

Corolario 4.3.1. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 y 2.1. Sea $\widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}$ la solución de (4.3) sujeta a la condición inicial $\phi_{m,\Delta t,h}^0 \in V_h^k$. Entonces, existen dos constantes positivas, J y D , tales que para $\Delta t < D$, se verifica*

$$\begin{aligned} & \sqrt{\gamma} \left\| \sqrt{\det F_{RK}} \widehat{\phi_{m,\Delta t,h}} \right\|_{l^\infty(L^2(\Omega))} + \sqrt{\frac{\Lambda}{4}} \left\| B F_{RK}^{-T} \mathcal{S}[\nabla \widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}] \sqrt{\det F_{RK}} \right\|_{l^2(L^2(\Omega))} \\ & + \sqrt{\frac{\alpha}{8}} \left\| \sqrt{\mathcal{S}[|F_{RK}^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}]} \mathcal{S}[\widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}] \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} \leq J \left(\sqrt{\gamma} \|\phi_{m,\Delta t,h}^0\|_{0,2,\Omega} \right. \\ & \left. + \left\| \sqrt{\det F_{RK}} f \circ X_{RK} \right\|_{l^2(L^2(\Omega))} + \left\| \sqrt{|(F_{RK})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK} g \circ X_{RK}} \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

siendo J y D constantes independientes del coeficiente tensorial de difusión; ambas dependen de \mathbf{v} , ρ y T , y la primera también de α y T y la segunda de δ .

DEMOSTRACIÓN. El espacio de elementos finitos $V_h^k \subset H_{\Gamma^D}^1(\Omega)$ y es de dimensión finita, por tanto es cerrado. Entonces, aplicando el Teorema 2.3.1 con $\mathcal{W} = V_h^k$ se deduce el resultado. \square

Corolario 4.3.2. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 y 2.1. Sea $\widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}$ la solución de (4.3) sujeta a la condición inicial $\phi_{m,\Delta t,h}^0 \in V_h^k$. Entonces, existen dos constantes positivas, J y D , con J dependiente de \mathbf{v} , A , α y T , tales que para $\Delta t < D$, se verifica*

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\gamma}{4}} \left\| \sqrt{\mathcal{S}[\det F_{RK}]} \mathcal{R}_{\Delta t}[\widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}] \right\|_{l^2(L^2(\Omega))} + \sqrt{\frac{\Lambda}{2}} \left\| B(F_{RK})^{-T} \nabla \widehat{\phi_{m,\Delta t,h}} \sqrt{\det F_{RK}} \right\|_{l^\infty(L^2(\Omega))} \\ & + \sqrt{\frac{\alpha}{4}} \left\| \sqrt{|(F_{RK})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}} \widehat{\phi_{m,\Delta t,h}} \right\|_{l^\infty(L^2(\Gamma^R))} \leq J \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{2}} \|B \nabla \phi_{m,\Delta t,h}^0\|_{0,2,\Omega} + \sqrt{\frac{\alpha}{4}} \|\phi_{m,\Delta t,h}^0\|_{0,2,\Gamma^R} \right. \\ & \left. + \left\| \sqrt{\det F_{RK}} f \circ X_{RK} \right\|_{l^2(L^2(\Omega))} + \left\| \sqrt{|(F_{RK})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK} g \circ X_{RK}} \right\|_{l^\infty(L^2(\Gamma^R))} \right. \\ & \left. + \left\| \sqrt{\mathcal{S}[|F_{RK}^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}]} \mathcal{R}_{\Delta t}[g \circ X_{RK}] \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el Teorema 2.4.1 con $\mathcal{W} = V_h^k$ se deduce el resultado. \square

4.3.2. Estimación de error en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ del método totalmente discretizado

El objetivo de este apartado es obtener una estimación en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ de la diferencia entre la solución discreta de (4.3), $\widehat{\phi_{m,\Delta t,h}} := \{\phi_{m,\Delta t,h}^n\}_{n=0}^N$, y la solución exacta del problema continuo en coordenadas materiales, $\widehat{\phi_m} := \{\phi_m^n\}_{n=0}^N$. Introducimos las siguientes notaciones

$$\widehat{e_{m,\Delta t,h}} := \widehat{\phi_{m,\Delta t,h}} - \widehat{\pi_h \phi_m}, \quad \vartheta_{m,h} := \phi_m - \pi_h \phi_m. \quad (4.6)$$

Entonces, $\widehat{\phi_m} - \widehat{\phi_{m,\Delta t,h}} = \widehat{\vartheta_{m,h}} - \widehat{e_{m,\Delta t,h}}$ y, como $\widehat{\vartheta_{m,h}}$ puede ser acotado, utilizando la Hipótesis 4.1, el problema se reduce a calcular una estimación de $\widehat{e_{m,\Delta t,h}}$. Para probar el resultado principal de este apartado dado en el Teorema 4.3.1 usaremos algunos resultados del Capítulo 3 y el siguiente lema.

Lema 4.3.1. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 1.1, 1.3, 1.4, 4.1 y $\Delta t < \min\{\eta, 1/2c, K\}$, siendo c la constante definida en (1.123) y η y K son las constantes que aparecen, respectivamente, en el Lema 1.5.1 y en el Corolario 1.5.3. Asumimos que la solución de (3.20) cumple*

$$\phi_m \in C^1(C^0(\overline{\Omega})) \cap C^0(H^{k+1}(\Omega)) \cap H^1(H^k(\Omega)).$$

Entonces, se verifica la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\vartheta_{m,h}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle \\ & \leq \frac{1}{8} \left\| C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \left(\nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ & \quad + \frac{1}{8} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \left(\nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ & \quad + \frac{\alpha}{16} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \left\{ e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ & \quad + \gamma \left\| \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} e_{m,\Delta t,h}^{n+1} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \gamma \left\| \sqrt{\det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ & \quad + \tilde{c} Q^2 h^{2k} \left(\frac{1}{\Delta t} \left\| \dot{\phi}_m \right\|_{L^2((t_n, t_{n+1}), H^k(\Omega))}^2 + \left\| \phi_m^{n+1} \right\|_{k+1,2,\Omega}^2 + \left\| \phi_m^n \right\|_{k+1,2,\Omega}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

siendo \tilde{c} una constante positiva, $n \in \{0, \dots, N-1\}$ y $\alpha > 0$ es la constante que aparece en la condición Robin de (1.8).

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar descomponemos $\left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\vartheta_{m,h}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle$ en tres sumandos, concretamente

$$\left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\vartheta_{m,h}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle = I_1^n + I_2^n + I_3^n$$

siendo

$$\begin{aligned}
I_1^n &= \left\langle \frac{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)}{2} \frac{\vartheta_{m,h}^{n+1} - \vartheta_{m,h}^n}{\Delta t}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle_{0,\Omega}, \\
I_2^n &= \frac{1}{4} \left\langle ((F_{RK}^{n+1})^{-1} A \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \det F_{RK}^{n+1} \right. \\
&\quad \left. + (F_{RK}^n)^{-1} A \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \det F_{RK}^n) \left(\nabla \vartheta_{m,h}^{n+1} + \nabla \vartheta_{m,h}^n \right), \nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle_{0,\Omega}, \\
I_3^n &= \frac{\alpha}{4} \left\langle (|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n) \left(\vartheta_{m,h}^{n+1} + \vartheta_{m,h}^n \right) \right. \\
&\quad \left. , e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle_{0,\Gamma^R}.
\end{aligned}$$

Obtengamos la cota superior para I_1^n , recordemos que se verifican

$$\begin{aligned}
\det F_{RK}^n(p) &= (1 - \Delta t \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) + O(\Delta t^2)) \det F_{RK}^{n+1}(p), \\
\det F_{RK}^{n+1}(p) &= (1 + \Delta t \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) + O(\Delta t^2)) \det F_{RK}^n(p),
\end{aligned}$$

siendo $p \in \bar{\Omega}$ y $O(\Delta t^2)$ dependiente de \mathbf{v} . Entonces, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad (2.8) con $\varepsilon = 1/\gamma$ se deduce

$$\begin{aligned}
I_1^n &= \left\langle \frac{\sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} (\rho \circ X_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n)}{2} \frac{\vartheta_{m,h}^{n+1} - \vartheta_{m,h}^n}{\Delta t}, \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} e_{m,\Delta t,h}^{n+1} \right\rangle_{0,\Omega} \\
&+ \left\langle \frac{\sqrt{\det F_{RK}^n} (\rho \circ X_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n)}{2} \frac{\vartheta_{m,h}^{n+1} - \vartheta_{m,h}^n}{\Delta t}, \sqrt{\det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle_{0,\Omega} \\
&- \frac{1}{2} \left\langle \left(\Delta t \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) + O(\Delta t^2) \right) \rho \circ X_{RK}^n \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \frac{\vartheta_{m,h}^{n+1} - \vartheta_{m,h}^n}{\Delta t}, \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} e_{m,\Delta t,h}^{n+1} \right\rangle_{0,\Omega} \\
&+ \frac{1}{2} \left\langle \left(\Delta t \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) + O(\Delta t^2) \right) \rho \circ X_{RK}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^n} \frac{\vartheta_{m,h}^{n+1} - \vartheta_{m,h}^n}{\Delta t}, \sqrt{\det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle_{0,\Omega} \\
&\leq \tilde{c} \left\| \frac{\vartheta_{m,h}^{n+1} - \vartheta_{m,h}^n}{\Delta t} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \gamma \left\| \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} e_{m,\Delta t,h}^{n+1} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \gamma \left\| \sqrt{\det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2, \quad (4.8)
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado las acotaciones (1.142) y (1.153). Además, utilizando la regla de Barrow se tiene

$$\frac{\vartheta_{m,h}^{n+1}(p) - \vartheta_{m,h}^n(p)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\vartheta}_{m,h}(p, s) ds.$$

Por tanto, aplicando la desigualdad de Holder se deduce

$$\left| \frac{\vartheta_{m,h}^{n+1}(p) - \vartheta_{m,h}^n(p)}{\Delta t} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\dot{\vartheta}_{m,h}(p, s) \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

y entonces

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\vartheta_{m,h}^{n+1} - \vartheta_{m,h}^n}{\Delta t} \right\|_{0,2,\Omega}^2 &\leq \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\dot{\vartheta}_{m,h}(p, s) \right)^2 ds dp \\
&= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \left(\dot{\vartheta}_{m,h}(p, s) \right)^2 dp ds = \frac{1}{\Delta t} \left\| \dot{\vartheta}_{m,h} \right\|_{L^2((t_n, t_{n+1}), L^2(\Omega))}^2.
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando la Hipótesis 4.1 para $s = 0$ y $r = k$ obtenemos

$$I_1^n \leq \frac{\tilde{c}Q^2h^{2k}}{\Delta t} \left\| \dot{\phi}_m \right\|_{L^2((t_n, t_{n+1}), H^k(\Omega))}^2 + \gamma \left\| \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} e_{m,\Delta t,h}^{n+1} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \gamma \left\| \sqrt{\det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2. \quad (4.9)$$

Para obtener la cota de I_2^n , aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (2.8), deduciendo

$$\begin{aligned} I_2^n &\leq \left(\tilde{c} \left\| \nabla \vartheta_{m,h}^{n+1} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \left\| \nabla \vartheta_{m,h}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\ &+ \frac{1}{8} \left\| C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \left(\nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &+ \frac{1}{8} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \left(\nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2. \end{aligned}$$

donde hemos utilizado (1.142) y la primera desigualdad de (1.153). A partir de esta desigualdad y utilizando la Hipótesis 4.1 con $s = 1$ y $r = k + 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} I_2^n &\leq \tilde{c}Q^2h^{2k} \left(\left\| \phi_m^{n+1} \right\|_{k+1,2,\Omega}^2 + \left\| \phi_m^n \right\|_{k+1,2,\Omega}^2 \right) \\ &+ \frac{1}{8} \left\| C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \left(\nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &+ \frac{1}{8} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \left(\nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para el término I_3^n utilizamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz, (1.142), (2.8) y la primera desigualdad de (1.153), obteniendo

$$\begin{aligned} I_3^n &\leq \tilde{c} \left(\left\| \vartheta_{m,h}^{n+1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \left\| \vartheta_{m,h}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right) \\ &+ \frac{\alpha}{16} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \left\{ e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Utilizando la contiuidad del operador *traza*, existe una constante positiva c_Ω tal que

$$\left\| \vartheta_{m,h}^m \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \leq c_\Omega \left\| \vartheta_{m,h}^m \right\|_{1,2,\Omega}^2,$$

para $m = n, n + 1$. Entonces, utilizando (4.11) y aplicando la Hipótesis 4.1 con $s = 1$ y $r = k + 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} I_3^n &\leq \tilde{c}Q^2h^{2k} \left(\left\| \phi_m^{n+1} \right\|_{k+1,2,\Omega}^2 + \left\| \phi_m^n \right\|_{k+1,2,\Omega}^2 \right) \\ &+ \frac{\alpha}{16} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \left\{ e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Finalmente, la desigualdad (4.7) se deduce de (4.9), (4.10) y (4.12). \square

Teorema 4.3.1. *Asumimos las Hipótesis 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 2.1, 3.2 y 4.1, además $X_e \in \mathbf{C}^5(\overline{\Omega} \times [0, T])$. Supongamos que la solución de (3.20) cumple*

$$\begin{aligned}\phi_m &\in C^3(L^2(\Omega)) \cap C^1(C^0(\overline{\Omega})) \cap C^0(H^{k+1}(\Omega)) \cap H^1(H^k(\Omega)), \\ \nabla \phi_m &\in C^2(\mathbf{H}^1(\Omega)), \quad \phi_m|_{\Gamma^R} \in C^2(L^2(\Gamma^R)),\end{aligned}$$

y $\widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}$ es la solución de (4.3) sujeta a la condición inicial $\phi_{m,\Delta t,h}^0 = \pi_h \phi_m^0$. Entonces existen dos constantes positivas J y D , independientes de h y Δt , tales que si $\Delta t < D$ se verifica

$$\begin{aligned}& \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \left\| \sqrt{\det F_{RK}} (\widehat{\phi_m} - \widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}) \right\|_{l^\infty(L^2(\Omega))} + \sqrt{\frac{\Lambda}{8}} \left\| B(F_{RK})^{-T} \mathcal{S} [\nabla \widehat{\phi_m} - \nabla \widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}] \sqrt{\det F_{RK}} \right\|_{l^2(\mathbf{L}^2(\Omega))} \\ & + \sqrt{\frac{\alpha}{8}} \left\| \sqrt{\mathcal{S} [(F_{RK})^{-T} \mathbf{m}] \det F_{RK}} \mathcal{S} [\phi_m - \phi_{m,\Delta t,h}] \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} \leq J \Delta t^2 \left(\|\phi_m\|_{C^3(L^2(\Omega))} \right. \\ & \quad \left. + \|\nabla \phi_m\|_{C^2(\mathbf{H}^1(\Omega))} + \|\nabla \phi_m \cdot \mathbf{m}\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))} + \|\phi_m\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))} \right. \\ & \quad \left. + \|\det F f_m\|_{C^2(L^2(\Omega))} + \|f\|_{C^1(\mathcal{T}^\delta)} + \|\det F |F^{-T} \mathbf{m}| g_m\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))} + \|g\|_{C^1(\mathcal{T}_{\Gamma^R}^\delta)} \right) \\ & \quad + J h^k \left(\left\| \dot{\phi}_m \right\|_{L^2(H^k(\Omega))} + \|\phi_m\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))} \right).\end{aligned}\tag{4.13}$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, por las notaciones introducidas en (4.6) se tiene $\widehat{e_{m,\Delta t,h}} = \widehat{\vartheta_{m,h}} - \widehat{\phi_m} + \widehat{\phi_{m,\Delta t,h}} \in [V_h^k]^{N+1}$. Entonces, utilizando (3.20) y (4.3) se deduce la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}& \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{e_{m,\Delta t,h}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle \\ & = \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} (\widehat{\vartheta_{m,h}} - \widehat{\phi_m} + \widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}), e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle \\ & = \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\vartheta_{m,h}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle - \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\phi_m}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle + \left\langle \mathcal{F}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle \\ & = \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\vartheta_{m,h}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle + \left\langle \left(\mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \right) \widehat{\phi_m}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle \\ & \quad + \left\langle \mathcal{F}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle,\end{aligned}\tag{4.14}$$

siendo $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Aplicando el Lema 2.3.1 se obtiene una cota inferior para (4.14), concretamente

$$\begin{aligned}& \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{e_{m,\Delta t,h}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle \\ & \geq \frac{1}{\Delta t} \left\| \sqrt{\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1}} e_{m,\Delta t,h}^{n+1} \right\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{\Delta t} \left\| \sqrt{\rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ & \quad + \frac{1}{4} \left\| C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \left(\nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ & \quad + \frac{1}{4} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \left(\nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ & \quad + \frac{\alpha}{4} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \left(e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right) \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ & \quad - \widehat{c\gamma} \left(\left\| \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} e_{m,\Delta t,h}^{n+1} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \left\| \sqrt{\det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2 \right),\end{aligned}\tag{4.15}$$

siendo $\widehat{c} = \rho_{1,\infty}(c_v + \bar{c}_v \Delta t)/\gamma$ y $n \in \{0, \dots, N-1\}$.

Por otro lado, aplicando los Lemas 3.3.14 y 3.3.15, se tiene

$$\begin{aligned}
& \left\langle \left(\mathcal{L}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \right) \widehat{\phi}_m, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle + \left\langle \mathcal{F}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}^{n+\frac{1}{2}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle \\
&= \left\langle \xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n+\frac{1}{2}} - \xi_f^{n+\frac{1}{2}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle_{0,\Omega} + \left\langle \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}} - \xi_g^{n+\frac{1}{2}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle_{0,\Gamma^R} \\
&\leq 2c_s \left(\left\| \xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \left\| \xi_f^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \right) + \frac{8c_g}{\alpha} \left(\left\| \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \left\| \xi_g^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right) \\
&+ \left\| \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} e_{m,\Delta t,h}^{n+1} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \left\| \sqrt{\det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&+ \frac{\alpha}{16} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \left(e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right) \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Para obtener la desigualdad (4.16) hemos aplicado también el Lema 3.2.1 con

$$\psi = e_{m,\Delta t,h}^{n+1}, \quad \varphi = e_{m,\Delta t,h}^n,$$

en primer lugar para

$$S^{n+1} = \xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n+\frac{1}{2}}, \quad G^{n+1} = \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}},$$

y en segundo lugar para

$$S^{n+1} = -\xi_f^{n+\frac{1}{2}}, \quad G^{n+1} = -\xi_g^{n+\frac{1}{2}}.$$

Considerando la cota inferior del término (4.14) dada en (4.15), y también las desigualdades (4.16) y (4.7) se deduce

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left\| \sqrt{\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1}} e_{m,\Delta t,h}^{n+1} \right\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{\Delta t} \left\| \sqrt{\rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&+ \frac{1}{8} \left\| C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \left(\nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&+ \frac{1}{8} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \left(\nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&+ \frac{\alpha}{8} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \left(e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right) \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
&\leq 2c_s \left(\left\| \xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \left\| \xi_f^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \right) + \frac{8c_g}{\alpha} \left(\left\| \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \left\| \xi_g^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right) \\
&+ 3\widehat{c}\gamma \left(\left\| \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} e_{m,\Delta t,h}^{n+1} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \left\| \sqrt{\det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
&+ \widetilde{c}Q^2 h^{2k} \left(\frac{1}{\Delta t} \left\| \dot{\phi}_m \right\|_{L^2((t_n, t_{n+1}), H^k(\Omega))}^2 + \left\| \phi_m^{n+1} \right\|_{k+1,2,\Omega}^2 + \left\| \phi_m^n \right\|_{k+1,2,\Omega}^2 \right),
\end{aligned} \tag{4.17}$$

siendo $\widehat{c} = \max \{1, 1/\gamma, \rho_{1,\infty}(c_v + \bar{c}_v \Delta t)/\gamma\}$ y \widetilde{c} una constante positiva. Dado $1 \leq q \leq N$ sumamos desde

$n = 0$ hasta $n = q - 1$ a ambos lados de la desigualdad (4.17) multiplicada por Δt , obteniendo

$$\begin{aligned}
& \|\sqrt{\rho \circ X_{RK}^q} \det F_{RK}^q e_{m,\Delta t,h}^q\|_{0,2,\Omega}^2 - \|\sqrt{\rho} e_{m,\Delta t,h}^0\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{\Delta t}{8} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \left(\nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \right) \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{\alpha \Delta t}{8} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} \left(e_{m,\Delta t,h}^{n+1} + e_{m,\Delta t,h}^n \right) \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& \leq 2c_s \Delta t \sum_{n=1}^q \left(\left\| \xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \left\| \xi_f^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \right) + \frac{8c_g \Delta t}{\alpha} \sum_{n=1}^q \left(\left\| \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \left\| \xi_g^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right) \\
& + 3\hat{c}\gamma \Delta t \left(\left\| \sqrt{\det F_{RK}^q} e_{m,\Delta t,h}^q \right\|_{0,2,\Omega}^2 + 2 \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{\det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
& + \tilde{c} Q^2 h^{2k} \sum_{n=0}^{q-1} \left(\left\| \dot{\phi}_m \right\|_{L^2((t_n, t_{n+1}), H^k(\Omega))}^2 + \Delta t \left(\left\| \phi_m^{n+1} \right\|_{k+1,2,\Omega}^2 + \left\| \phi_m^n \right\|_{k+1,2,\Omega}^2 \right) \right), \tag{4.18}
\end{aligned}$$

donde hemos omitido algún término positivo de la izquierda de la desigualdad. A continuación, vamos a acotar algunos de los términos de la derecha de (4.18). En primer lugar, se tiene

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \dot{\phi}_m \right\|_{L^2((t_n, t_{n+1}), H^k(\Omega))}^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \left(\left\| \phi_m^{n+1} \right\|_{k+1,2,\Omega}^2 + \left\| \phi_m^n \right\|_{k+1,2,\Omega}^2 \right) \\
& \leq \left\| \dot{\phi}_m \right\|_{L^2(H^k(\Omega))}^2 + 2T \left\| \phi_m \right\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))}^2.
\end{aligned}$$

En segundo lugar, aplicando de nuevo los Lemas 3.3.14 y 3.3.15 se deduce

$$\begin{aligned}
& 2c_s \Delta t \sum_{n=1}^q \left(\left\| \xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \left\| \xi_f^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \right) + \frac{8c_g \Delta t}{\alpha} \sum_{n=1}^q \left(\left\| \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \left\| \xi_g^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right) \\
& \leq \tilde{c} \Delta t^4 \left(\left\| \phi_m \right\|_{C^3(L^2(\Omega))}^2 + \left\| \nabla \phi_m \right\|_{C^2(\mathbf{H}^1(\Omega))}^2 + \left\| \nabla \phi_m \cdot \mathbf{m} \right\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))}^2 + \left\| \phi_m \right\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))}^2 \right. \\
& \quad \left. + \left\| \det F f_m \right\|_{C^2(L^2(\Omega))}^2 + \left\| f \right\|_{C^1(\mathcal{T}^\delta)}^2 + \left\| \det F |F^{-T} \mathbf{m}| g_m \right\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))}^2 + \left\| g \right\|_{C^1(\mathcal{T}_\Gamma^\delta)}^2 \right), \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Introducimos las siguientes notaciones

$$\begin{aligned}
\theta_n^1 &:= \gamma \left\| \sqrt{\det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
\theta_n^2 &:= \frac{\Lambda}{8} \sum_{s=0}^{n-1} \Delta t \left\| B(F_{RK}^s)^{-T} \left(\nabla e_{m,\Delta t,h}^{s+1} + \nabla e_{m,\Delta t,h}^s \right) \sqrt{\det F_{RK}^s} \right\|_{0,2,\Omega}^2, \\
\bar{\theta}_n &:= \frac{\alpha}{8} \sum_{s=0}^{n-1} \Delta t \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{s+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{s+1} + |(F_{RK}^s)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^s} \left(e_{m,\Delta t,h}^{s+1} + e_{m,\Delta t,h}^s \right) \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las Hipótesis 1.3 y 1.4 y la notación introducida, se deduce

$$(1 - 3\hat{c}\Delta t) \theta_q^1 + \theta_q^2 + \bar{\theta}_q \leq 6\hat{c}\Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \theta_n^1 + \tilde{c} (\theta_0^1 + \tilde{C})$$

donde \tilde{C} contiene los términos constantes multiplicados por h^{2k} y Δt^4 . Si Δt es suficientemente pequeño podemos aplicar el Lema de Gronwall en su versión discreta (ver [67]) y aplicar el máximo para

$q \in \{1, \dots, N\}$. De esta manera, teniendo en cuenta que $e_{m,\Delta t,h}^0 = 0$, $\widehat{\phi_m} - \widehat{\phi_{m,\Delta t,h}} = \widehat{\vartheta_{m,h}} - \widehat{e_{m,\Delta t,h}}$, que se cumple la Hipótesis 4.1, y las cotas (1.142) y (1.153), se consigue (4.13). \square

Observación 4.3.1. *Nótese que la desigualdad del teorema previo es válida para todo coeficiente de difusión que verifique la Hipótesis 1.4 (incluso para el problema de transporte). Además la constante J se mantiene acotada en el límite hiperbólico.*

4.3.3. Estimación de error en norma $l^\infty(H^1(\Omega))$ del método totalmente discretizado

El objetivo de este apartado es obtener una estimación en norma $l^\infty(H^1(\Omega))$ de la diferencia entre la solución discreta de (4.3), $\widehat{\phi_{m,\Delta t,h}} := \{\phi_{m,\Delta t,h}^n\}_{n=0}^N$, y la solución exacta del problema continuo en coordenadas materiales, $\widehat{\phi_m} := \{\phi_m^n\}_{n=0}^N$. Utilizando la notación introducida en el Apartado 4.3.2, podemos escribir $\widehat{\phi_m} - \widehat{\phi_{m,\Delta t,h}} = \widehat{\vartheta_{m,h}} - \widehat{e_{m,\Delta t,h}}$, por lo que teniendo en cuenta la Hipótesis 4.1, el problema se reduce a calcular una estimación de $\widehat{e_{m,\Delta t,h}}$. Para probar el resultado principal de este apartado, dado en el Teorema 4.3.2, usaremos algunos resultados del Capítulo 3 y el siguiente lema.

Lema 4.3.2. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 1.1, 1.3, 1.4, 2.1, 4.1, y además $\Delta t < \min\{\eta/2, \delta/(2c_v), 1/c_v, 1/(2c), K\}$, siendo c y c_v las constantes definidas en (1.123) y (2.7), respectivamente, y η y K son las constantes que aparecen en el Lema 1.5.1 y en el Corolario 1.5.3, respectivamente. Asumimos que la solución de (3.20) cumple*

$$\phi_m \in C^1(C^1(\overline{\Omega})) \cap C^0(H^{k+1}(\Omega)) \cap H^1(H^{k+1}(\Omega)), \quad \nabla \phi_m \in C^1(C^0(\overline{\Omega})).$$

Entonces, para todo entero $q \in \{1, \dots, N\}$ se verifica la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{q-1} \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\vartheta_{m,h}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle \\ & \leq \frac{1}{4\Delta t} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n} \left(e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ & \quad + \frac{\Lambda}{4} \left\| B(F_{RK}^q)^{-T} \nabla e_{m,h}^q \sqrt{\det F_{RK}^q} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{\alpha}{8} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} e_{m,\Delta t,h}^q \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ & \quad + \widehat{c} \Delta t \Lambda \sum_{n=1}^{q-1} \left\| B(F_{RK}^n)^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \widehat{c} \alpha \Delta t \sum_{n=1}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ & \quad - \frac{1}{4} \langle ((F_{RK}^1)^{-1} A \circ X_{RK}^1 (F_{RK}^1)^{-T} \det F_{RK}^1 + A) (\nabla \vartheta_{m,h}^1 + \nabla \vartheta_{m,h}^0), \nabla e_{m,\Delta t,h}^0 \rangle_{0,\Omega} \\ & \quad - \frac{\alpha}{4} \langle (|(F_{RK}^1)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^1 + 1) (\vartheta_{m,h}^1 + \vartheta_{m,h}^0), e_{m,\Delta t,h}^0 \rangle_{0,\Gamma^R} \\ & \quad + \widetilde{c} Q^2 h^{2k} \left(\left\| \dot{\phi}_m \right\|_{L^2(H^{k+1}(\Omega))}^2 + \left\| \phi_m \right\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))}^2 \right), \end{aligned} \tag{4.20}$$

siendo $\widehat{c} = \max\{\overline{c}_v c_A / \Lambda, \overline{c}_v\}$, \widetilde{c} una constante positiva y $\alpha > 0$ es la constante que aparece en la condición Robin de (1.8).

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, descomponemos $\left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\vartheta_{m,h}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle$ en tres sumandos, concretamente

$$\left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\vartheta_{m,h}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle = I_1^n + I_2^n + I_3^n,$$

siendo

$$\begin{aligned}
I_1^n &= \left\langle \frac{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)}{2} \frac{\vartheta_{m,h}^{n+1} - \vartheta_{m,h}^n}{\Delta t}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle_{0,\Omega}, \\
I_2^n &= \frac{1}{4} \left\langle ((F_{RK}^{n+1})^{-1} A \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \det F_{RK}^{n+1} \right. \\
&\quad \left. + (F_{RK}^n)^{-1} A \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \det F_{RK}^n) \left(\nabla \vartheta_{m,h}^{n+1} + \nabla \vartheta_{m,h}^n \right), \nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle_{0,\Omega}, \\
I_3^n &= \frac{\alpha}{4} \left\langle (|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n) \left(\vartheta_{m,h}^{n+1} + \vartheta_{m,h}^n \right) \right. \\
&\quad \left. , e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle_{0,\Gamma_R},
\end{aligned}$$

para $0 \leq n \leq N-1$. Obtengamos una cota superior para I_1^n , a partir de la que se deduce la cota para $\sum_{n=0}^{q-1} I_1^n$. En primer lugar, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (2.8) se tiene

$$\begin{aligned}
I_1^n &\leq \frac{1}{4\Delta t} \left\| \sqrt{\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n} \left(\vartheta_{m,h}^{n+1} - \vartheta_{m,h}^n \right) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4\Delta t} \left\| \sqrt{\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n} \left(e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\leq \frac{1}{4\Delta t} \left\| \sqrt{\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n} \left(e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\quad + \frac{\tilde{c}}{\Delta t} \left\| \vartheta_{m,h}^{n+1} - \vartheta_{m,h}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

donde hemos utilizado la primera desigualdad de (1.153) y la Hipótesis 1.3. Además, utilizando la regla de Barrow se tiene

$$\vartheta_{m,h}^{n+1}(p) - \vartheta_{m,h}^n(p) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\vartheta}_{m,h}(p, s) ds.$$

Por tanto, aplicando la desigualdad de Holder se deduce

$$\left| \vartheta_{m,h}^{n+1}(p) - \vartheta_{m,h}^n(p) \right| \leq \sqrt{\Delta t} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\dot{\vartheta}_{m,h}(p, s) \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

y entonces

$$\frac{1}{\Delta t} \left\| \vartheta_{m,h}^{n+1} - \vartheta_{m,h}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2 \leq \int_{\Omega} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\dot{\vartheta}_{m,h}(p, s) \right)^2 ds dp = \left\| \dot{\vartheta}_{m,h} \right\|_{L^2((t_n, t_{n+1}), L^2(\Omega))}^2.$$

Finalmente, utilizando la Hipótesis 4.1 para $s = 0$ y $r = k$ obtenemos

$$\begin{aligned}
I_1^n &\leq \frac{1}{4\Delta t} \left\| \sqrt{\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n} \left(e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\quad + \tilde{c} Q^2 h^{2k} \left\| \dot{\phi}_m \right\|_{L^2((t_n, t_{n+1}), H^k(\Omega))}^2,
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{q-1} I_1^n &\leq \frac{1}{4\Delta t} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n} \left(e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
&\quad + \tilde{c} Q^2 h^{2k} \left\| \dot{\phi}_m \right\|_{L^2(H^k(\Omega))}^2.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

La estimación para $\sum_{n=0}^{q-1} I_2$ se deduce a partir de la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{q-1} \langle \mathbf{w}^{n+1}, \nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \rangle_{0,\Omega} &= \langle \mathbf{w}^q, \nabla e_{m,\Delta t,h}^q \rangle_{0,\Omega} - \langle \mathbf{w}^1, \nabla e_{m,\Delta t,h}^0 \rangle_{0,\Omega} \\ &\quad - \Delta t \sum_{n=1}^{q-1} \left\langle \frac{\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n}{\Delta t}, \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle_{0,\Omega}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

siendo $\{\mathbf{w}^n\}_{n=1}^N \in [\mathbf{L}^2(\Omega)]^N$, y teniendo en cuenta que se verifican las siguientes igualdades

$$\det F_{RK}^n(p) = (1 - \Delta t \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) + O(\Delta t^2)) \det F_{RK}^{n+1}(p), \quad (4.24)$$

$$\det F_{RK}^{n+1}(p) = (1 + \Delta t \operatorname{div} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) + O(\Delta t^2)) \det F_{RK}^n(p), \quad (4.25)$$

$$C(X_{RK}^{n+1}(p)) = C(X_{RK}^n(p)) + D^n(p) \quad (4.26)$$

$$(F_{RK}^{n+1})^{-T}(p) = \left(I - \Delta t L^{n+\frac{1}{2}}(Y^n(p)) + O(\Delta t^2) \right)^T (F_{RK}^n)^{-T}(p), \quad (4.27)$$

$$(F_{RK}^n)^{-T} = \left(I + \Delta t L^{n+\frac{1}{2}} \circ Y^n + O(\Delta t^2) \right)^T (F_{RK}^{n+1})^{-T}, \quad (4.28)$$

siendo $O(\Delta t^2)$ dependiente de \mathbf{v} , y en las dos últimas igualdades $O(\Delta t^2)$ es una matriz con la misma estructura que L (ver Hipótesis 2.1); además D^n tiene la forma dada en (1.165) y verifica

$$\|D^n\|_{0,\infty,\Omega} \leq \bar{c}_v \sqrt{c_A} \Delta t. \quad (4.29)$$

Aplicando la igualdad (4.23) con

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{n+1} &= ((F_{RK}^{n+1})^{-1} A \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \det F_{RK}^{n+1} \\ &\quad + (F_{RK}^n)^{-1} A \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \det F_{RK}^n) \left(\nabla \vartheta_{m,h}^{n+1} + \nabla \vartheta_{m,h}^n \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

y utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, las desigualdades (1.142), (1.153) y (2.8), y las igualdades (4.24)-(4.28), se deduce facilmente la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{q-1} I_2^n &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{q-1} \left\langle ((F_{RK}^{n+1})^{-1} A \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \det F_{RK}^{n+1} \right. \\ &\quad \left. + (F_{RK}^n)^{-1} A \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \det F_{RK}^n) \left(\nabla \vartheta_{m,h}^{n+1} + \nabla \vartheta_{m,h}^n \right), \nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle_{0,\Omega} \\ &\leq \tilde{c} \left(\left\| \nabla \vartheta_{m,h}^q \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \left\| \nabla \vartheta_{m,h}^{q-1} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \right) + \frac{\Lambda}{4} \left\| B(F_{RK}^q)^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^q \sqrt{\det F_{RK}^q} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &\quad + \bar{c}_v c_A \Delta t \sum_{n=1}^{q-1} \left\| B(F_{RK}^n)^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \left\langle ((F_{RK}^1)^{-1} A \circ X_{RK}^1 (F_{RK}^1)^{-T} \det F_{RK}^1 + A) \left(\nabla \vartheta_{m,h}^1 + \nabla \vartheta_{m,h}^0 \right), \nabla e_{m,\Delta t,h}^0 \right\rangle_{0,\Omega} \\ &\quad + \tilde{c} \Delta t \sum_{n=0}^q \left\| \nabla \vartheta_{m,h}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \tilde{c} \Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \frac{\nabla \vartheta_{m,h}^{n+1} - \nabla \vartheta_{m,h}^n}{\Delta t} \right\|_{0,2,\Omega}^2, \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde hemos tenido en cuenta que $X_{RK}^0(p) = p$ para todo $p \in \bar{\Omega}$. A continuación, vamos a acotar algunos términos de la derecha de (4.31). En primer lugar, utilizando la Hipótesis 4.1 para $s = 1$ y $r = k + 1$ se deduce

$$\left\| \nabla \vartheta_{m,h}^q \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \left\| \nabla \vartheta_{m,h}^{q-1} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \Delta t \sum_{n=0}^q \left\| \nabla \vartheta_{m,h}^n \right\|_{0,2,\Omega}^2 \leq (2 + T) Q^2 h^{2k} \|\phi_m\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))}^2. \quad (4.32)$$

En segundo lugar, utilizando la regla de Barrow se tiene

$$\nabla \vartheta_{m,h}^{n+1}(p) - \nabla \vartheta_{m,h}^n(p) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\nabla \vartheta_{m,h})^\cdot(p, s) ds.$$

Por tanto, de la desigualdad de Holder se deduce

$$\left| \frac{\nabla \vartheta_{m,h}^{n+1}(p) - \nabla \vartheta_{m,h}^n(p)}{\Delta t} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} |(\nabla \vartheta_{m,h})^\cdot(p, s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

y entonces

$$\left\| \frac{\nabla \vartheta_{m,h}^{n+1} - \nabla \vartheta_{m,h}^n}{\Delta t} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \leq \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \int_{t_n}^{t_{n+1}} |(\nabla \vartheta_{m,h})^\cdot(p, s)|^2 ds dp = \frac{1}{\Delta t} \|(\nabla \vartheta_{m,h})^\cdot\|_{L^2((t_n, t_{n+1}), \mathbf{L}^2(\Omega))}^2.$$

Finalmente, utilizando la Hipótesis 4.1 para $s = 1$ y $r = k + 1$ se deduce

$$\Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \frac{\nabla \vartheta_{m,h}^{n+1} - \nabla \vartheta_{m,h}^n}{\Delta t} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \leq Q^2 h^{2k} \|\dot{\phi}_m\|_{L^2(H^{k+1}(\Omega))}^2.$$

Introduciendo esta desigualdad y (4.32) en (4.31) se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{q-1} I_2^n &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{q-1} \left\langle ((F_{RK}^{n+1})^{-1} A \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \det F_{RK}^{n+1} \right. \\ &\quad \left. + (F_{RK}^n)^{-1} A \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \det F_{RK}^n) (\nabla \vartheta_{m,h}^{n+1} + \nabla \vartheta_{m,h}^n), \nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle_{0,\Omega} \\ &\leq \frac{1}{4} \left\| C \circ X_{RK}^q (F_{RK}^q)^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^q \sqrt{\det F_{RK}^q} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &\quad + \bar{c}_v c_A \Delta t \sum_{n=1}^{q-1} \left\| B(F_{RK}^n)^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \left\langle ((F_{RK}^1)^{-1} A \circ X_{RK}^1 (F_{RK}^1)^{-T} \det F_{RK}^1 + A) (\nabla \vartheta_{m,h}^1 + \nabla \vartheta_{m,h}^0), \nabla e_{m,\Delta t,h}^0 \right\rangle_{0,\Omega} \\ &\quad + \tilde{c} Q^2 h^{2k} \left(\|\dot{\phi}_m\|_{L^2(H^{k+1}(\Omega))}^2 + \|\phi_m\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))}^2 \right). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Para $\sum_{n=0}^{q-1} I_3^n$ procedemos de forma análoga. Concretamente, en este caso utilizamos la igualdad

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{q-1} \langle \psi^{n+1}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \rangle_{0,\Gamma^R} &= \langle \psi^q, e_{m,\Delta t,h}^q \rangle_{0,\Gamma^R} - \langle \psi^1, e_{m,\Delta t,h}^0 \rangle_{0,\Gamma^R} \\ &\quad - \Delta t \sum_{n=1}^{q-1} \left\langle \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t}, e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle_{0,\Gamma^R}, \end{aligned} \tag{4.34}$$

siendo $\{\psi^n\}_{n=1}^N \in [L^2(\Gamma^R)]^N$ y tenemos en cuenta las siguientes igualdades

$$|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} = (1 + O(\Delta t)) |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n, \tag{4.35}$$

$$|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n = (1 + O(\Delta t)) |(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}, \tag{4.36}$$

siendo $O(\Delta t)$ dependiente de \mathbf{v} . En efecto, aplicando la igualdad (4.34) con

$$\psi^{n+1} = (|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n) (\vartheta_{m,h}^{n+1} + \vartheta_{m,h}^n) \quad (4.37)$$

y utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la desigualdad (2.8) y las igualdades (4.35) y (4.36), se deduce facilmente la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{q-1} I_3^n \\ &= \frac{\alpha}{4} \sum_{n=0}^{q-1} \left\langle (|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1} + |(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n) (\vartheta_{m,h}^{n+1} + \vartheta_{m,h}^n), e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle_{0,\Gamma^R} \\ &\leq \tilde{c} \left(\left\| \vartheta_{m,h}^q \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \left\| \vartheta_{m,h}^{q-1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right) + \frac{\alpha}{8} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} e_{m,\Delta t,h}^q \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ &+ \bar{c}_v \alpha \Delta t \sum_{n=1}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ &- \frac{\alpha}{4} \left\langle (|(F_{RK}^1)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^1 + 1) (\vartheta_{m,h}^1 + \vartheta_{m,h}^0), e_{m,\Delta t,h}^0 \right\rangle_{0,\Gamma^R} + \tilde{c} \Delta t \sum_{n=0}^q \left\| \vartheta_{m,h}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ &+ \tilde{c} \Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \frac{\vartheta_{m,h}^{n+1} - \vartheta_{m,h}^n}{\Delta t} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2, \end{aligned} \quad (4.38)$$

donde hemos tenido en cuenta que $X_{RK}^0(p) = p$ para todo $p \in \bar{\Omega}$, y que se verifican las desigualdades (1.142) y (1.153). A continuación, vamos a acotar algunos términos de la derecha de (4.38). En primer lugar, utilizando la continuidad del operador *traza* y la Hipótesis 4.1 para $s = 1$ y $r = k + 1$ se deduce

$$\left\| \vartheta_{m,h}^q \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \left\| \vartheta_{m,h}^{q-1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \Delta t \sum_{n=0}^q \left\| \vartheta_{m,h}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \leq (2 + T) Q^2 h^{2k} \left\| \phi_m \right\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))}^2. \quad (4.39)$$

Por otro lado, utilizando la regla de Barrow se tiene

$$\vartheta_{m,h}^{n+1}(p) - \vartheta_{m,h}^n(p) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\vartheta}_{m,h}(p, s) ds.$$

Por tanto, aplicando la desigualdad de Holder se deduce

$$\left| \frac{\vartheta_{m,h}^{n+1}(p) - \vartheta_{m,h}^n(p)}{\Delta t} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\dot{\vartheta}_{m,h}(p, s) \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

y entonces

$$\left\| \frac{\vartheta_{m,h}^{n+1}(p) - \vartheta_{m,h}^n(p)}{\Delta t} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \leq \frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma^R} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\dot{\vartheta}_{m,h}(p, s) \right)^2 ds dp = \frac{1}{\Delta t} \left\| \dot{\vartheta}_{m,h} \right\|_{L^2((t_n, t_{n+1}), L^2(\Gamma^R))}^2.$$

Finalmente, utilizando la continuidad del operador *traza* y la Hipótesis 4.1 para $s = 1$ y $r = k + 1$ se deduce

$$\Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \frac{\vartheta_{m,h}^{n+1} - \vartheta_{m,h}^n}{\Delta t} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \leq Q^2 h^{2k} \left\| \dot{\phi}_m \right\|_{L^2(H^{k+1}(\Omega))}^2.$$

Introduciendo esta desigualdad y (4.39) en (4.38) se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{q-1} I_3^n &\leq \frac{\alpha}{8} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} e_{m,\Delta t,h}^q \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
&\quad + \bar{c}_v \alpha \Delta t \sum_{n=1}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
&\quad - \frac{\alpha}{4} \langle |(F_{RK}^1)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^1 + 1 \rangle (\vartheta_{m,h}^1 + \vartheta_{m,h}^0), e_{m,\Delta t,h}^0 \rangle_{0,\Gamma^R} \\
&\quad + \tilde{c} Q^2 h^{2k} \left(\left\| \dot{\phi}_m \right\|_{L^2(H^{k+1}(\Omega))}^2 + \|\phi_m\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))}^2 \right).
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Finalmente, la desigualdad (4.20) se deduce de las desigualdades (4.22), (4.33) y (4.40). \square

Teorema 4.3.2. *Asumimos las Hipótesis 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 2.1, 3.3 y 4.1, además $X_e \in \mathbf{C}^5(\bar{\Omega} \times [0, T])$. Supongamos que la solución de (3.20) cumple*

$$\begin{aligned}
\phi_m &\in C^3(L^2(\Omega)) \cap C^1(C^1(\bar{\Omega})) \cap C^0(H^{k+1}(\Omega)) \cap H^1(H^{k+1}(\Omega)), \\
\nabla \phi_m &\in C^3(\mathbf{H}^1(\Omega)), \quad \phi_m|_{\Gamma^R} \in C^3(L^2(\Gamma^R)),
\end{aligned}$$

y $\widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}$ es la solución de (4.3) sujeta a la condición inicial $\phi_{m,\Delta t,h}^0 = \pi_h \phi_m^0$. Entonces existen dos constantes positivas J y D , independientes de h y Δt , tales que si $\Delta t < D$ se verifica

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{\gamma}{8}} \left\| \sqrt{\mathcal{S}[\det F_{RK}] \widehat{\mathcal{R}_{\Delta t}[\phi_m - \phi_{m,\Delta t,h}]}} \right\|_{l^2(L^2(\Omega))} \\
&+ \sqrt{\frac{\Lambda}{4}} \left\| B(F_{RK})^{-T} (\nabla \phi_m - \nabla \widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}) \sqrt{\det F_{RK}} \right\|_{l^\infty(\mathbf{L}^2(\Omega))} \\
&+ \sqrt{\frac{\alpha}{4}} \left\| \sqrt{|(F_{RK})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}} (\phi_m - \phi_{m,\Delta t,h}) \right\|_{l^\infty(L^2(\Gamma^R))} \leq J \Delta t^2 (\|\phi_m\|_{C^3(L^2(\Omega))} \\
&\quad + \|\nabla \phi_m\|_{C^2(\mathbf{H}^1(\Omega))} + \|\nabla \phi_m \cdot \mathbf{m}\|_{C^3(L^2(\Gamma^R))} + \|\phi_m\|_{C^3(L^2(\Gamma^R))} \\
&\quad + \|\det F f_m\|_{C^2(L^2(\Omega))} + \|f\|_{C^1(\mathcal{T}^\delta)} + \|\det F|F^{-T} \mathbf{m}| g_m\|_{C^3(L^2(\Gamma^R))} + \|g\|_{C^2(\mathcal{T}_{\Gamma^R}^\delta)} \\
&\quad + J h^k \left(\left\| \dot{\phi}_m \right\|_{L^2(H^{k+1}(\Omega))} + \|\phi_m\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))} \right).
\end{aligned} \tag{4.41}$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, por las notaciones introducidas en (4.6) se tiene $\widehat{e_{m,\Delta t,h}} = \widehat{\vartheta_{m,h}} - \widehat{\phi_m} + \widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}$ $\widehat{\phi_{m,\Delta t,h}} \in [V_h^k]^{N+1}$. Entonces, utilizando (3.20) y (4.3) se deduce la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{e_{m,\Delta t,h}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} (\widehat{\vartheta_{m,h}} - \widehat{\phi_m} + \widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}), e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\vartheta_{m,h}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle - \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\phi_m}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle + \left\langle \mathcal{F}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\vartheta_{m,h}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle + \left\langle \left(\mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \right) \widehat{\phi_m}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \mathcal{F}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Aplicando el Lema 2.4.1 se obtiene una cota inferior para (4.42), concretamente

$$\begin{aligned}
& \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{e_{m,\Delta t,h}^{n+1}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle \\
& \geq \frac{1}{2\Delta t} \left\| \sqrt{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)} (e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{1}{2} \left\| C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{2} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{\alpha}{2} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} e_{m,\Delta t,h}^{n+1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 - \frac{\alpha}{2} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& - \widehat{c} \Delta t \Lambda \left(\|B(F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|B(F_{RK}^n)^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
& - \widehat{c} \Delta t \alpha \left(\left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} e_{m,\Delta t,h}^{n+1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right), \quad (4.43)
\end{aligned}$$

siendo $\widehat{c} = \max \{c_A \bar{c}_v / \Lambda, \bar{c}_v\}$ y $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Por otro lado aplicando los Lemas 3.3.14 y 3.3.15, se tiene

$$\begin{aligned}
& \left\langle \left(\mathcal{L}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \right) \widehat{\phi}_m, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle + \left\langle \mathcal{F}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}^{n+\frac{1}{2}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle \\
& = \left\langle \xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n+\frac{1}{2}} - \xi_f^{n+\frac{1}{2}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle_{0,\Omega} + \left\langle \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}} - \xi_g^{n+\frac{1}{2}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle_{0,\Gamma^R}, \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Considerando la cota inferior de (4.42) dada en (4.43), la igualdad (4.44) y aplicando el Lema 3.2.2 con $\psi = e_{m,\Delta t,h}^{n+1}$ y $\varphi = e_{m,\Delta t,h}^n$, en primer lugar para $S^{n+1} = \xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n+\frac{1}{2}}$ y en segundo lugar para $S^{n+1} = -\xi_f^{n+\frac{1}{2}}$, se deduce

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\Delta t} \left\| \sqrt{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)} (e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{1}{2} \left\| C \circ X_{RK}^{n+1} (F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}} \right\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{2} \left\| C \circ X_{RK}^n (F_{RK}^n)^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{\alpha}{2} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} e_{m,\Delta t,h}^{n+1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 - \frac{\alpha}{2} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& \leq \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\vartheta}_{m,h}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle + \frac{4c_s \Delta t}{\gamma} \left(\|\xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\xi_f^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
& + \frac{\gamma}{8\Delta t} \left\| \sqrt{\det F_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n} (e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n) \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \left\langle \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}} - \xi_g^{n+\frac{1}{2}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle_{0,\Gamma^R} \\
& + \widehat{c} \Delta t \Lambda \left(\|B(F_{RK}^{n+1})^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^{n+1} \sqrt{\det F_{RK}^{n+1}}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|B(F_{RK}^n)^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \sqrt{\det F_{RK}^n}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
& + \widehat{c} \Delta t \alpha \left(\left\| \sqrt{|(F_{RK}^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^{n+1}} e_{m,\Delta t,h}^{n+1} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right). \quad (4.45)
\end{aligned}$$

Dado $q \leq 1$ sumamos desde $n = 0$ hasta $n = q - 1$ a ambos lados de la desigualdad (4.45), obteniendo

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\Delta t} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)} (e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{1}{2} \left\| C \circ X_{RK}^q (F_{RK}^q)^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^q \sqrt{\det F_{RK}^q} \right\|_{0,2,\Omega}^2 - \frac{1}{2} \left\| C \nabla e_{m,\Delta t,h}^0 \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{\alpha}{2} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} e_{m,\Delta t,h}^q \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 - \frac{\alpha}{2} \left\| e_{m,\Delta t,h}^0 \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& \leq \sum_{n=0}^{q-1} \left\langle \mathcal{L}_{\Delta t}^{n+\frac{1}{2}} \widehat{\vartheta}_{m,h}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle + \frac{4c_s \Delta t}{\gamma} \sum_{n=0}^{q-1} \left(\|\xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\xi_f^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
& + \frac{\gamma}{8\Delta t} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{\det F_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n} (e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n) \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \sum_{n=0}^{q-1} \left\langle \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}} - \xi_g^{n+\frac{1}{2}}, e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n \right\rangle_{0,\Gamma^R} \\
& + \widehat{c} \Delta t \Lambda \left(\left\| B(F_{RK}^q)^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^q \sqrt{\det F_{RK}^q} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + 2 \sum_{n=0}^{q-1} \left\| B(F_{RK}^n)^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
& + \widehat{c} \Delta t \alpha \left(\left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} e_{m,\Delta t,h}^q \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + 2 \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right). \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad (4.20) y aplicando el Lema 3.2.3 con $\widehat{\psi} = \widehat{e}_{m,\Delta t,h}$, en primer lugar para $G^{n+1} = \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}}$ y en segundo lugar para $G^{n+1} = -\xi_g^{n+\frac{1}{2}}$, se deduce

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\Delta t} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{(\rho \circ X_{RK}^{n+1} \det F_{RK}^{n+1} + \rho \circ X_{RK}^n \det F_{RK}^n)} (e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\
& + \frac{1}{2} \left\| C \circ X_{RK}^q (F_{RK}^q)^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^q \sqrt{\det F_{RK}^q} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{\alpha}{4} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} e_{m,\Delta t,h}^q \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& \leq \frac{\Lambda}{4} \left\| B(F_{RK}^q)^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^q \sqrt{\det F_{RK}^q} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{4c_s \Delta t}{\gamma} \sum_{n=1}^q \left(\|\xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n-\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\xi_f^{n-\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
& + \frac{\gamma}{8\Delta t} \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{\det F_{RK}^{n+1} + \det F_{RK}^n} (e_{m,\Delta t,h}^{n+1} - e_{m,\Delta t,h}^n) \right\|_{0,2,\Omega}^2 + \frac{8c_g}{\alpha} \left(\|\xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{q-\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \|\xi_g^{q-\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2\alpha} \left(\|\xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \|\xi_g^{\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right) + \frac{\Delta t c_g}{\alpha} \sum_{n=1}^{q-1} \left\| \frac{\xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}} - \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \frac{\Delta t c_g}{\alpha} \sum_{n=1}^{q-1} \left\| \frac{\xi_g^{n+\frac{1}{2}} - \xi_g^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\
& + \widehat{c} \Delta t \Lambda \left(\left\| B(F_{RK}^q)^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^q \sqrt{\det F_{RK}^q} \right\|_{0,2,\Omega}^2 + 3 \sum_{n=0}^{q-1} \left\| B(F_{RK}^n)^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2 \right) \\
& + \widehat{c} \Delta t \alpha \left(\left\| \sqrt{|(F_{RK}^q)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^q} e_{m,\Delta t,h}^q \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + 4 \sum_{n=0}^{q-1} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \right) \\
& + \widetilde{c} Q^2 h^{2k} \left(\left\| \dot{\phi}_m \right\|_{L^2(H^{k+1}(\Omega))}^2 + \|\phi_m\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))}^2 \right). \tag{4.47}
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $e_{m,\Delta t,h}^0 = 0$. A continuación vamos a acotar algunos de los términos de la

derecha de la desigualdad (4.47). Aplicando los Lemas 3.3.14 y 3.3.15 se deduce

$$\begin{aligned} & \Delta t \sum_{n=1}^q \left(\|\xi_{\mathcal{L}_\Omega}^{n-\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\xi_f^{n-\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Omega}^2 \right) + \|\xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{q-\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \|\xi_g^{q-\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ & + \|\xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \|\xi_g^{\frac{1}{2}}\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ & \leq \tilde{c} \Delta t^4 \left(\|\phi_m\|_{C^3(L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla \phi_m\|_{C^2(\mathbf{H}^1(\Omega))}^2 + \|\phi_m\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))}^2 + \|\det F |F^{-T} \mathbf{m}| g_m\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))}^2 \right. \\ & \left. + \|\nabla \phi_m \cdot \mathbf{m}\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))}^2 + \|\det F f_m\|_{C^2(L^2(\Omega))}^2 + \|f\|_{C^1(\mathcal{T}^\delta)}^2 + \|g\|_{C^1(\mathcal{T}_{\Gamma^R}^\delta)}^2 \right). \end{aligned}$$

Por último, utilizando de nuevo los Lemas 3.3.14 y 3.3.15, y procediendo como en el Teorema 3.3.2 para acotar los términos

$$\left\| \widehat{\mathcal{R}_{\Delta t}[\xi_{\mathcal{L}_\Gamma}]} \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))} + \left\| \widehat{\mathcal{R}_{\Delta t}[\xi_g]} \right\|_{l^2(L^2(\Gamma^R))},$$

se deduce

$$\begin{aligned} & \Delta t \sum_{n=1}^{q-1} \left\| \frac{\xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n+\frac{1}{2}} - \xi_{\mathcal{L}_\Gamma}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 + \Delta t \sum_{n=1}^{q-1} \left\| \frac{\xi_g^{n+\frac{1}{2}} - \xi_g^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2 \\ & \leq \tilde{c} \Delta t^4 \left(\|\phi_m\|_{C^3(L^2(\Gamma^R))}^2 + \|\det F |F^{-T} \mathbf{m}| g_m\|_{C^3(L^2(\Gamma^R))}^2 + \|\nabla \phi_m \cdot \mathbf{m}\|_{C^3(L^2(\Gamma^R))}^2 + \|g\|_{C^2(\mathcal{T}_{\Gamma^R}^\delta)}^2 \right). \end{aligned}$$

Introducimos las siguientes notaciones

$$\begin{aligned} \theta_n^1 &:= \frac{\gamma}{8\Delta t} \sum_{s=0}^{n-1} \left\| \sqrt{\det F_{RK}^{s+1} + \det F_{RK}^s} \left(e_{m,\Delta t,h}^{s+1} - e_{m,\Delta t,h}^s \right) \right\|_{0,2,\Omega}^2 \\ \theta_n^2 &:= \frac{\Lambda}{4} \left\| B(F_{RK}^n)^{-T} \nabla e_{m,\Delta t,h}^n \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2, \\ \bar{\theta}_n &:= \frac{\alpha}{4} \left\| \sqrt{|(F_{RK}^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_{RK}^n} e_{m,\Delta t,h}^n \right\|_{0,2,\Gamma^R}^2. \end{aligned}$$

siendo $n = 0, \dots, N$. Utilizando las Hipótesis 1.3 y 1.4 obtenemos

$$\theta_q^1 + (1 - 4\hat{c}\Delta t)\theta_q^2 + (1 - 4\hat{c}\Delta t)\bar{\theta}_q \leq 12\hat{c}\Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \theta_n^2 + 16\hat{c}\Delta t \sum_{n=0}^{q-1} \bar{\theta}_n + \tilde{C},$$

donde \tilde{C} contiene los términos constantes multiplicados por h^{2k} y por Δt^4 .

Si Δt es suficientemente pequeño podemos aplicar el Lema de Gronwall en su versión discreta (ver [67]) y aplicar el máximo para $q \in \{1, \dots, N\}$. De esta manera, teniendo en cuenta además que $\widehat{\phi_m} - \widehat{\phi_{m,\Delta t,h}} = \widehat{\vartheta_{m,h}} - \widehat{e_{m,\Delta t,h}}$, que se cumple la Hipótesis 4.1 y las cotas (1.142) y (1.153), y que se verifica (ver Demostración del Lema 4.3.2)

$$\left\| \sqrt{\mathcal{S}[\det F_{RK}]} \widehat{\mathcal{R}_{\Delta t}[\vartheta_{m,h}]} \right\|_{l^2(L^2(\Omega))} \leq \tilde{c} Q h^k \left\| \dot{\phi}_m \right\|_{L^2(H^k(\Omega))},$$

se consigue (4.41). □

Nótese que la Observación 2.4.2 es válida para la constante J del Teorema 4.3.2.

4.3.4. Estimación de error en coordenadas espaciales

A partir de la solución del problema discreto (4.3), $\widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}$, se construye una aproximación de la solución del problema continuo en coordenadas espaciales, $\widehat{\phi} = \{\phi^n\}_{n=0}^N$, que denotaremos por $\widehat{\phi_{\Delta t,h}}$. Distinguimos dos casos dependiendo de si conocemos o no la expresión analítica del movimiento X_e . Denotamos por $l^\infty(L^2(\Omega_{t_n}))$ y $l^\infty(\mathbf{L}^2(\Omega_{t_n}))$ los espacios de sucesiones $l^\infty((0, T), L^2(\Omega_t))$ y $l^\infty((0, T), \mathbf{L}^2(\Omega_t))$, respectivamente, (son espacios análogos a $l^\infty((0, T), L^2(\Omega))$ y $l^\infty((0, T), \mathbf{L}^2(\Omega))$ donde el dominio espacial depende de la variable temporal), dotados de las normas

$$\left\| \widehat{\psi} \right\|_{l^\infty(L^2(\Omega_{t_n}))} := \max_{n=0}^N \|\psi^n\|_{0,2,\Omega_{t_n}}, \quad \left\| \widehat{\Psi} \right\|_{l^\infty(\mathbf{L}^2(\Omega_{t_n}))} := \max_{n=0}^N \|\Psi^n\|_{0,2,\Omega_{t_n}}.$$

En primer lugar, analizamos la situación en la que se conoce la expresión analítica de X_e .

- **X_e conocida**

En este caso, calculamos $\widehat{\phi_{\Delta t,h}}$ como sigue

$$\phi_{\Delta t,h}^n(x) := \phi_{m,\Delta t,h}^n(P(x, t_n)), \quad (4.48)$$

para todo $x \in \overline{\Omega}_{t_n} = X_e(\overline{\Omega}, t_n)$ y $0 \leq n \leq N$. A partir del Teorema 4.3.1 se deduce una estimación de la diferencia entre la solución discreta y la continua en coordenadas espaciales, en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$. Concretamente, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 4.3.3. *Asumimos las Hipótesis del Teorema 4.3.1. Sea $\widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}$ la solución de (4.3) sujeta a la condición inicial $\phi_{m,\Delta t,h}^0 = \pi_h \phi_m^0 = \pi_h \phi^0$ y $\widehat{\phi_{\Delta t,h}}$ calculada utilizando (4.48). Entonces existen dos constantes positivas J y D , independientes de h y Δt , tales que si $\Delta t < D$ se verifica*

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \|\phi - \widehat{\phi_{\Delta t,h}}\|_{l^\infty(L^2(\Omega_{t_n}))} &\leq J \Delta t^2 \left(\|\phi_m\|_{C^3(L^2(\Omega))} + \|\nabla \phi_m\|_{C^2(\mathbf{H}^1(\Omega))} + \|\nabla \phi_m \cdot \mathbf{m}\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))} \right. \\ &\quad + \|\phi_m\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))} + \|\det F f_m\|_{C^2(L^2(\Omega))} + \|f\|_{C^1(\mathcal{T}^\delta)} + \|\det F |F^{-T} \mathbf{m}| g_m\|_{C^2(L^2(\Gamma^R))} \\ &\quad \left. + \|g\|_{C^1(\mathcal{T}_{\Gamma^R}^\delta)} \right) + J h^k \left(\left\| \dot{\phi}_m \right\|_{L^2(H^k(\Omega))} + \|\phi_m\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))} \right). \end{aligned} \quad (4.49)$$

DEMOSTRACIÓN. Utilizando el cambio de variable $x = X_e(p, t_n)$, los Lemas 1.5.4 y 3.3.4 y (4.48) se deduce

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{t_n}} (\phi^n(x) - \phi_{\Delta t,h}^n(x))^2 dx &= \int_{\Omega} (\phi_m^n(p) - \phi_{m,\Delta t,h}^n(p))^2 \det F^n(p) dp \\ &\leq (1 + \tilde{c} \Delta t^2) \left\| (\phi_m^n - \phi_{m,\Delta t,h}^n) \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (4.50)$$

siendo $0 \leq n \leq N$. Entonces, aplicando la desigualdad (4.13) se tiene el resultado. \square

Corolario 4.3.4. *Asumimos las Hipótesis del Teorema 4.3.2. Sea $\widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}$ la solución de (4.3) sujeta a la condición inicial $\phi_{m,\Delta t,h}^0 = \pi_h \phi^0$. Entonces existen dos constantes positivas J y D , independientes de h y Δt , tales que si $\Delta t < D$ se verifica*

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\Lambda}{4}} \left\| B(\text{grad } \widehat{\phi} - \text{grad } \phi_{\Delta t,h}) \right\|_{l^\infty(\mathbf{L}^2(\Omega_{t_n}))} &\leq J \Delta t^2 (\|\phi_m\|_{C^3(L^2(\Omega))} \\ &\quad + \|\nabla \phi_m\|_{C^2(\mathbf{H}^1(\Omega))} + \|\nabla \phi_m \cdot \mathbf{m}\|_{C^3(L^2(\Gamma^R))} + \|\phi_m\|_{C^3(L^2(\Gamma^R))} \\ &\quad + \|\det F f_m\|_{C^2(L^2(\Omega))} + \|f\|_{C^1(\mathcal{T}^\delta)} + \|\det F |F^{-T} \mathbf{m}| g_m\|_{C^3(L^2(\Gamma^R))} + \|g\|_{C^2(\mathcal{T}_{\Gamma^R}^\delta)} \\ &\quad + J h^k \left(\left\| \dot{\phi}_m \right\|_{L^2(H^{k+1}(\Omega))} + \|\phi_m\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))} \right). \end{aligned} \quad (4.51)$$

DEMOSTRACIÓN. Utilizando el cambio de variable $x = X_e(p, t_n)$ y los Lemas 1.5.2, 1.5.4, 2.2.1, 3.3.3 y 3.3.4, y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{t_n}} |B(\text{grad } \phi^n(x) - \text{grad } \phi_{\Delta t,h}^n(x))|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |B(F^n)^{-T}(p) (\nabla \phi_m^n(p) - \nabla \phi_{m,\Delta t,h}^n(p))|^2 \det F^n(p) dp \\ &\leq 2 \int_{\Omega} |B((F^n)^{-T}(p) - (F_{RK}^n)^{-T}(p)) (\nabla \phi_m^n(p) - \nabla \phi_{m,\Delta t,h}^n(p))|^2 \det F^n(p) dp \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} |B(F_{RK}^n)^{-T}(p) (\nabla \phi_m^n(p) - \nabla \phi_{m,\Delta t,h}^n(p))|^2 \det F^n(p) dp \\ &\leq 2(1 + \tilde{c}(\Delta t^2 + \Delta t^4 + \Delta t^6)) \left\| B F_{RK}^{-T} (\nabla \phi_m^n - \nabla \phi_{m,\Delta t,h}^n) \sqrt{\det F_{RK}^n} \right\|_{0,2,\Omega}^2, \end{aligned} \quad (4.52)$$

siendo $0 \leq n \leq N$ y donde hemos tenido en cuenta que por la Hipótesis 2.1 se verifica

$$(I - B)(F^n)^{-1} B = (I - B)(F_{RK}^n)^{-1} B = 0.$$

Entonces, a partir de las desigualdades (4.41) y (4.52) se deduce el resultado. \square

• X_e desconocida

En este caso, aproximamos $P(x, t_n)$ utilizando fórmulas numéricas que conserven el orden del método. Concretamente, si denotamos por $P_a^n(x)$ dicha aproximación, calculamos $\widehat{\phi_{\Delta t,h}}$ como sigue

$$\phi_{\Delta t,h}^n(x) := \phi_{m,\Delta t,h}^n(P_a^n(x)), \quad (4.53)$$

para todo $x \in \overline{\Omega}_{t_n}$, siendo $0 \leq n \leq N$.

Nótese que para un campo de velocidades cualquiera, no tenemos garantizado que $P_a^n(x) \in \overline{\Omega}$, $\forall x \in \overline{\Omega}_{t_n}$. Entonces, si $P_a^n(x) \notin \overline{\Omega}$ aproximamos $\phi_{\Delta t,h}^n(P_a^n(x))$ por

$$\phi_{\Delta t,h}^n(P_a^n(x)) \simeq \phi_{m,\Delta t,h}^n(x_f), \quad (4.54)$$

siendo x_f el punto de la frontera de Ω más próximo a $P_a^n(x)$. A continuación vamos a obtener una estimación de la diferencia entre la solución discreta y la continua en coordenadas espaciales para un campo de velocidades que se anula sobre la frontera. Concretamente, el resultado se enuncia en el Teorema 4.3.3 y se requieren las siguientes hipótesis.

Hipótesis 4.2. *Las aplicaciones ρ , \mathbf{v} , A , f y g del problema (1.8) verifican*

- $\rho \in W^{1,\infty}(\mathcal{O})$, $\rho_m \in C^2(L^\infty(\Omega))$, $\rho \geq \gamma > 0$, $A \in \mathbb{W}^{2,\infty}(\mathcal{O})$ y verifica (1.165), $A_m \in C^3(\mathbb{W}^{1,\infty}(\Omega))$,
- $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^3(\mathcal{T})$,
- $f_m \in C^2(L^2(\Omega))$, $f \in C^1(\mathcal{T})$, $g \in C^3(L^2(\Gamma^R))$, y $\alpha > 0$.

Teorema 4.3.3. *Asumimos las Hipótesis 1.2, 2.1, 4.2, y 4.1, además $X_e \in \mathbf{C}^5(\overline{\Omega} \times [0, T])$. Supongamos que la solución de (3.20) cumple*

$$\begin{aligned} \phi_m &\in C^3(L^2(\Omega)) \cap C^1(C^1(\overline{\Omega})) \cap C^0(H^{k+1}(\Omega)) \cap H^1(H^{k+1}(\Omega)), \\ \nabla \phi_m &\in C^3(\mathbf{H}^1(\Omega)), \quad \phi|_{\Gamma^R} \in C^3(L^2(\Gamma^R)), \quad \phi \in C^0(W^{2,\infty}(\Omega)). \end{aligned}$$

Sea $\widehat{\phi_{m,\Delta t,h}}$ la solución de (4.3) sujeta a la condición inicial $\phi_{m,\Delta t,h}^0 = \pi_h \phi^0$ y $\widehat{\phi_{\Delta t,h}}$ calculada utilizando (4.53) con $P_a^n = (X_{RK}^n)^{-1}$, para $0 \leq n \leq N$. Entonces existen dos constantes positivas J y D , independientes de h y Δt , tales que si $\Delta t < D$ se verifica

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{\gamma}{2}} \|\phi - \widehat{\phi_{\Delta t,h}}\|_{l^\infty(L^2(\Omega))} + \sqrt{\frac{\Lambda}{4}} \|B(\text{grad } \phi - \text{grad } \phi_{\Delta t,h})\|_{l^\infty(\mathbf{L}^2(\Omega))} \\ &\leq J \Delta t^2 \left(\|\phi\|_{C^0(W^{2,\infty}(\Omega))} + \|\phi_m\|_{C^3(L^2(\Omega))} + \|\nabla \phi_m\|_{C^2(\mathbf{H}^1(\Omega))} + \|\phi\|_{C^3(L^2(\Gamma^R))} \right. \\ &\quad \left. + \|g\|_{C^3(L^2(\Gamma^R))} + \|\nabla \phi_m \cdot \mathbf{m}\|_{C^3(L^2(\Gamma^R))} + \|\det F f_m\|_{C^2(L^2(\Omega))} + \|f\|_{C^1(\mathcal{T})} \right) \\ &\quad + J h^k \left(\|\dot{\phi}_m\|_{L^2(H^{k+1}(\Omega))} + \|\phi_m\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))} \right). \end{aligned} \quad (4.55)$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, nótese que si Δt es suficientemente pequeño, aplicando el Lema 1.5.6 se deduce que $(X_{RK}^n)^{-1}$ existe y además $(X_{RK}^n)^{-1}(\overline{\Omega}) = \overline{\Omega}$. Por tanto, la aplicación $\widehat{\phi_{\Delta t,h}}$ dada por

$$\phi_{\Delta t,h}^n(x) = \phi_{m,\Delta t,h}^n((X_{RK}^n)^{-1}(x)) \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad (4.56)$$

está bien definida. Entonces, utilizando el cambio de variable $x = X_{RK}^n(p)$, se consigue

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\phi^n(x) - \phi_{\Delta t,h}^n(x))^2 dx &= \int_{\Omega} (\phi^n(X_{RK}^n(p)) - \phi_{m,\Delta t,h}^n(p))^2 \det F_{RK}^n(p) dp \\ &\leq 2 \int_{\Omega} (\phi_m^n(p) - \phi_{m,\Delta t,h}^n(p))^2 \det F_{RK}^n(p) dp \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} (\phi^n(X_{RK}^n(p)) - \phi^n(X_e^n(p)))^2 \det F_{RK}^n(p) dp. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Teniendo en cuenta la regularidad de la solución ϕ , se tiene

$$(\phi^n(X_{RK}^n(p)) - \phi^n(X_e^n(p)))^2 \leq \tilde{c} \Delta t^4 \|\phi\|_{C^0(W^{1,\infty}(\Omega))}^2, \quad (4.58)$$

donde hemos utilizado (3.22). Introduciendo esta desigualdad en (4.57), se deduce

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\phi^n(x) - \phi_{\Delta t,h}^n(x))^2 dx &\leq 2 \int_{\Omega} (\phi_m^n(p) - \phi_{m,\Delta t,h}^n(p))^2 \det F_{RK}^n(p) dp \\ &\quad + \tilde{c} \Delta t^4 \|\phi\|_{C^0(W^{1,\infty}(\Omega))}^2, \end{aligned} \quad (4.59)$$

donde hemos utilizado la primera desigualdad de (1.153).

Por otro lado, aplicando el cambio de variable $x = X_{RK}^n(p)$ y usando la regla de la cadena, se tiene

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |B(\text{grad } \phi^n(x) - \text{grad } \phi_{\Delta t, h}^n(x))|^2 dx \\
&= \int_{\Omega} |B(\text{grad}_x \phi^n(X_{RK}^n(p)) - \text{grad}_x \phi_{\Delta t, h}^n(X_{RK}^n(p)))|^2 \det F_{RK}^n(p) dp \\
&\leq 2 \int_{\Omega} |B(\text{grad}_x \phi^n(X_{RK}^n(p)) - \text{grad}_x \phi^n(X_e^n(p)))|^2 \det F_{RK}^n(p) dp \\
&+ 2 \int_{\Omega} |B((F^n)^{-T} \nabla \phi_m^n(p) - (F_{RK}^n)^{-T} \nabla \phi_{m, \Delta t, h}^n(p))|^2 \det F_{RK}^n(p) dp \quad (4.60) \\
&\leq 2 \int_{\Omega} |B(\text{grad}_x \phi^n(X_{RK}^n(p)) - \text{grad}_x \phi^n(X_e^n(p)))|^2 \det F_{RK}^n(p) dp \\
&+ 4 \int_{\Omega} |B(((F^n)^{-T} - (F_{RK}^n)^{-T}) \nabla \phi_m^n(p))|^2 \det F_{RK}^n(p) dp \\
&+ 4 \int_{\Omega} |B(F_{RK}^n)^{-T} (\nabla \phi_m^n(p) - \nabla \phi_{m, \Delta t, h}^n(p))|^2 \det F_{RK}^n(p) dp.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la primera desigualdad de (1.153) y la estimación (3.39) se deduce

$$\int_{\Omega} |B(((F^n)^{-T} - (F_{RK}^n)^{-T}) \nabla \phi_m^n(p))|^2 \det F_{RK}^n(p) dp \leq \tilde{c} \Delta t^4 \|\nabla \phi_m\|_{C^0(\mathbf{L}^2(\Omega))}^2.$$

Además por la regularidad de ϕ y utilizando la estimación (3.22), se tiene

$$|\text{grad}_x \phi^n(X_{RK}^n(p)) - \text{grad}_x \phi^n(X_e^n(p))|^2 \leq \tilde{c} \Delta t^4 \|\phi\|_{C^0(W^{2, \infty}(\Omega))}^2. \quad (4.61)$$

Entonces, introduciendo estas desigualdades en (4.60) obtenemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |B(\text{grad } \phi^n(x) - \text{grad } \phi_{\Delta t, h}^n(x))|^2 dx \\
&\leq 4 \int_{\Omega} |B(F_{RK}^n)^{-T} (\nabla \phi_m^n(p) - \nabla \phi_{m, \Delta t, h}^n(p))|^2 \det F_{RK}^n(p) dp \quad (4.62) \\
&+ \tilde{c} \Delta t^4 \left(\|\nabla \phi_m\|_{C^0(\mathbf{L}^2(\Omega))}^2 + \|\phi\|_{C^0(W^{2, \infty}(\Omega))}^2 \right).
\end{aligned}$$

Finalmente, a partir de las desigualdades (4.13), (4.41), (4.59) y (4.62) y teniendo en cuenta que se verifica la Hipótesis 1.2 se deduce el resultado. \square

Observación 4.3.2. Una de las ventajas que presentan los métodos Lagrangianos es que para todo instante temporal se resuelve el problema sobre un dominio fijo (el dominio de referencia). Por tanto, en la práctica sólo es necesario mallar dicho dominio de referencia. Nótese que para los métodos semi-Lagrangianos en general el dominio cambia en cada instante de tiempo, por lo que es necesario mallar todos los dominios movidos $\overline{\Omega}_{t_n}$, $0 \leq n \leq N$.

4.4. Resultados Numéricos

En esta sección presentamos dos ejemplos numéricos en dominios bidimensionales. En el primero de ellos consideramos una solución regular y un campo de velocidades de divergencia nula. Realizamos simulaciones para diferentes coeficientes de difusión, incluyendo la ecuación de transporte. Verificamos los órdenes de convergencia obtenidos para el método Lagrangiano expuesto. En el segundo ejemplo la velocidad

presenta una pendiente considerable. Para este ejemplo realizamos un análisis comparativo entre diferentes métodos de características. En la Sección 6.3 también resolvemos el Ejemplo 2, utilizando el método PSI, y comparamos los resultados numéricos con los obtenidos en esta sección.

En general las integrales que aparecen en la formulación de Galerkin no se pueden calcular exactamente. Por tanto, en la práctica, se aproximan usando un proceso de integración numérica. En primer lugar, descomponemos dichas integrales como suma de integrales sobre cada elemento del mallado. En segundo lugar, utilizamos un cambio de variable en la integración, de manera que todas las integrales se reducen al cálculo de integrales sobre un elemento de referencia \hat{T} ; posteriormente estas integrales se aproximan utilizando fórmulas de cuadratura que describimos a continuación. Cada una de las fórmulas que se proponen es exacta para un determinado espacio de polinomios.

- Esquema exacto para polinomios de grado no superior a 2. Uso de 3 nodos interiores.

$$(C3) : \quad \int_{\hat{T}} \hat{\psi}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \sim \frac{1}{3} Area(\hat{T}) \sum_{i=1}^3 \hat{\psi}(\hat{c}_i),$$

donde los nodos de cuadratura $\hat{c}_i, 1 \leq i \leq 3$, son puntos interiores, caracterizados por las coordenadas baricéntricas

Nodo	Coordenadas baricéntricas
\hat{c}_1	$(1/6, 1/6, 2/3)$
\hat{c}_2	$(1/6, 2/3, 1/6)$
\hat{c}_3	$(2/3, 1/6, 1/6)$

- Esquema exacto para polinomios de grado no superior a 5. Uso de 7 nodos interiores.

$$(C6) : \quad \int_{\hat{T}} \hat{\psi}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \sim Area(\hat{T}) \left\{ \delta_1 \sum_{i=1}^3 \hat{\psi}(\hat{g}_i) + \delta_2 \sum_{i=1}^3 \hat{\psi}(\hat{h}_i) + \delta_3 \hat{\psi}(\hat{a}) \right\},$$

siendo $\delta_1 = 0.1323941527$, $\delta_2 = 0.1259391805$, $\delta_3 = 0.22500$ y donde los nodos de cuadratura \hat{g}_i, \hat{h}_i , $1 \leq i \leq 3$, son puntos interiores, caracterizados por las coordenadas baricéntricas

Nodo	Coordenadas baricéntricas
\hat{g}_1	$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_2)$
\hat{g}_2	$(\gamma_2, \gamma_1, \gamma_2)$
\hat{g}_3	$(\gamma_2, \gamma_2, \gamma_1)$
\hat{h}_1	$(\gamma_3, \gamma_4, \gamma_4)$
\hat{h}_2	$(\gamma_4, \gamma_3, \gamma_4)$
\hat{h}_3	$(\gamma_4, \gamma_4, \gamma_3)$

con

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 0.0597158717, \\ \gamma_2 &= 0.4701420641, \\ \gamma_3 &= 0.7974269853, \\ \gamma_4 &= 0.1012865073, \end{aligned}$$

y \hat{a} es el baricentro del triángulo: $\hat{a} = \frac{1}{3}(\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3)$.

Como consecuencia de la integración numérica aparecerán términos adicionales en las estimaciones de error que, en algunos casos, ocasionan la pérdida de estabilidad incondicional. En la literatura hay trabajos que analizan los efectos de la integración numérica en los métodos de Lagrange-Galerkin (ver [20], [42], [55], [66], [77], [78]). En el Ejemplo 2 analizamos la influencia de las fórmulas de cuadratura en el error para diferentes métodos de características.

Nótese que la norma en el espacio $H^1(\mathcal{A})$ (respectivamente, $L^2(\mathcal{A})$) se aproxima utilizando integración numérica, y denotamos este espacio con dicha “norma” por $H_h^1(\mathcal{A})$ (respectivamente, $L_h^2(\mathcal{A})$). Concretamente, usamos la fórmula referenciada por (C6), de manera que el error debido a la integración numérica sea despreciable. En el Ejemplo 1 denotamos por $l^\infty(H_h^1(\Omega_{t_n}))$ y $l^\infty(L_h^2(\Omega_{t_n}))$ los espacios de sucesiones dotados de las “normas”

$$\left\| \widehat{\psi} \right\|_{l^\infty(H_h^1(\Omega_{t_n}))} := \max_{n=0}^N \|\psi^n\|_{H_h^1(\Omega_{t_n})}, \quad \left\| \widehat{\psi} \right\|_{l^\infty(L_h^2(\Omega_{t_n}))} := \max_{n=0}^N \|\psi^n\|_{L_h^2(\Omega_{t_n})}.$$

A lo largo de esta sección, utilizaremos mallados uniformes y estructurados de dominios cuadrados. Por tanto, el número de divisiones en cada eje, que denotamos por N_x para el eje x y N_y para el eje y , determina el mallado. Además, para la discretización espacial de los distintos métodos, usamos el espacio de elementos finitos cuadráticos, por tanto, $k = 2$.

Ejemplo 1

Resolvemos el problema del Gaussiano rotativo (Rotating Gaussian hill). Concretamente, elegimos $A = \sigma_1 I$, $\mathbf{v} = (-x_2, x_1)$, $f = 0$ en el dominio $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ y $T = 2\pi$. Imponemos condiciones de contorno de Dirichlet y condiciones iniciales apropiadas tal que la solución del problema es

$$\phi(x_1, x_2, t) = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 + 4\sigma_1 t} \exp \left\{ -\frac{(\overline{x}(t) - x_c)^2 + (\overline{y}(t) - y_c)^2}{\sigma_2 + 4\sigma_1 t} \right\},$$

donde

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x_1 \cos t + x_2 \sin t, \quad \overline{y} = -x_1 \sin t + x_2 \cos t, \\ (x_c, y_c) &= (0.25, 0), \quad \sigma_2 = 0.01 \end{aligned}$$

Presentamos, para $\sigma_1 = 0.001$ y para el problema de transporte ($\sigma_1 = 0$), las curvas de error en norma $l^\infty(H_h^1(\Omega_{t_n}))$ y $l^\infty(L_h^2(\Omega_{t_n}))$ obtenidas utilizando el método expuesto, que denotamos en forma abreviada por $(\mathcal{LG})_2$, el método que resulta de tomar $\theta = 1$ en la ecuación (1.67) y utilizar el método de Euler para aproximar el movimiento, que denotaremos por $(\mathcal{LG})_1$ y el que resulta de tomar $\theta = 1/2$ en la ecuación (1.67) y utilizar el método de Runge-Kutta de tercer orden para aproximar el movimiento, que denotaremos por $(\mathcal{LG})_3$. Utilizando el método $(\mathcal{LG})_1$ (respectivamente, $(\mathcal{LG})_3$) se espera obtener un error en norma $l^\infty(H_h^1(\Omega_{t_n}))$ de orden $O(\Delta t + h^2)$ (respectivamente, $O(\Delta t^2 + \Delta t^3 + h^2)$). En la Figura 4.1 representamos los errores obtenidos (eje y) fijada la malla espacial, $N_x = N_y = 133$, y variando el número de pasos de tiempo (eje x). Obtenemos errores temporales de orden 3 para el método $(\mathcal{LG})_2$ y $(\mathcal{LG})_3$, que es superior al orden obtenido teóricamente para el método $(\mathcal{LG})_2$, mientras que para el método $(\mathcal{LG})_1$ se obtienen los órdenes esperados.

En la Figura 4.2 representamos los errores, fijado el paso temporal, $\Delta t = 2\pi/2000$, y variando la malla espacial. Para la norma $l^\infty(H_h^1(\Omega_{t_n}))$ se obtiene el orden de error que predice la teoría (orden 2). Para la norma $l^\infty(L_h^2(\Omega_{t_n}))$ se observa orden 3.

En la Figura 4.3 representamos los errores para el caso del problema de transporte ($\sigma_1 = 0$). En

la gráfica de arriba calculamos los errores en norma $l^\infty(L_h^2(\Omega_{t_n}))$, fijada la malla espacial, $N_x = N_y = 1/265$, y variando el número de pasos de tiempo. En la gráfica de abajo calculamos los errores en norma $l^\infty(L_h^2(\Omega_{t_n}))$ y $l^\infty(H_h^1(\Omega_{t_n}))$ fijado el paso temporal, $\Delta t = 2\pi/2000$, variando la malla espacial desde $N_x = N_y = 1/25$ hasta $N_x = N_y = 1/265$. En este ejemplo y para este caso, se obtienen errores espaciales con órdenes mayores que los que predice la teoría, puesto que teóricamente se tiene orden espacial igual a 2 para la norma $l^\infty(L_h^2(\Omega_{t_n}))$ y sin embargo el orden numérico es igual a 3. También se continúa observando orden 2 espacial en norma $l^\infty(H_h^1(\Omega_{t_n}))$. Nótese que el error predominante, incluso para pasos de tiempo groseros, es el espacial.

En las Figuras 4.4 y 4.5 representamos la solución calculada con el método $(\mathcal{LG})_2$ y el método clásico de características semi-Lagrangiano (de orden uno) combinado con elementos finitos \mathbb{P}_1 , respectivamente, comparada con la solución exacta.

Nótese que a partir de la expresión para la velocidad considerada en este ejemplo, se deduce fácilmente la expresión analítica del movimiento X_e , concretamente

$$X_e(p, t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

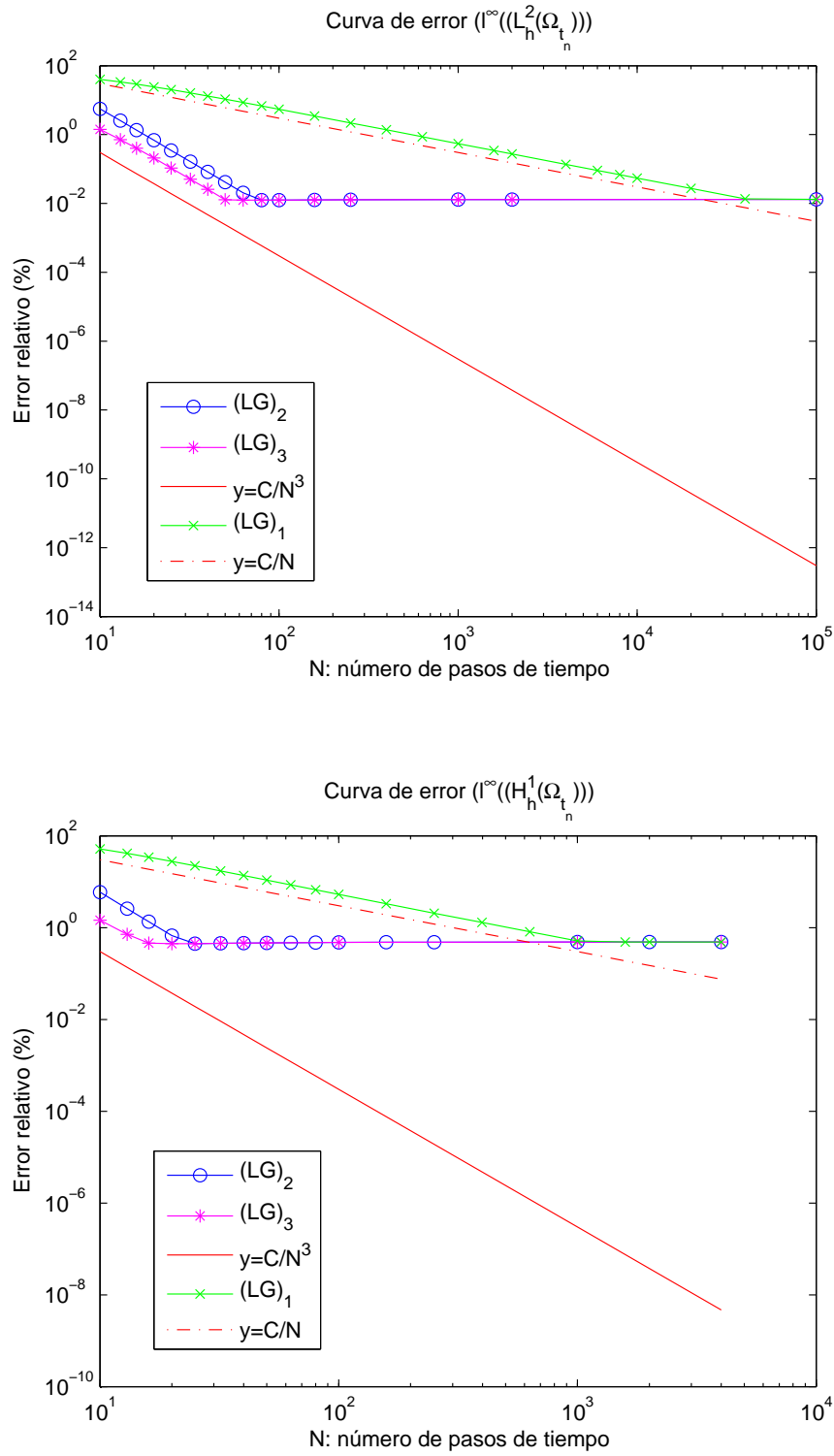


Figura 4.1: Errores relativos en escala logarítmica para el Ejemplo 1 en norma $l^\infty(L_h^2(\Omega_{t_n}))$ (arriba) y $l^\infty(H_h^1(\Omega_{t_n}))$ (abajo) tomando $\sigma_1 = 0.001$. Fijamos la malla espacial, $N_x = N_y = 133$, variamos el número de pasos de tiempo.

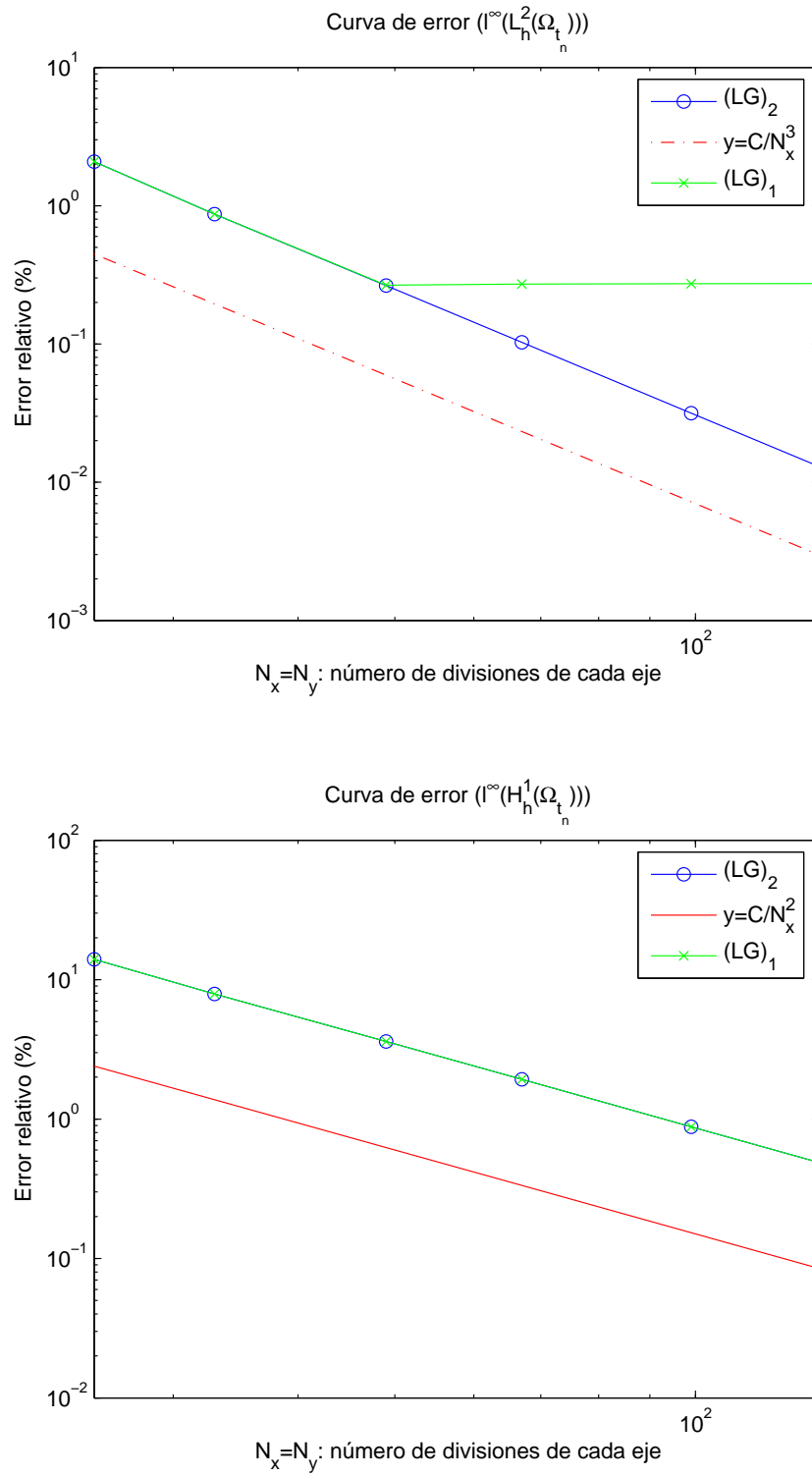


Figura 4.2: Errores relativos en escala logarítmica para el Ejemplo 1 en norma $l^\infty(L_h^2(\Omega_{t_n}))$ (arriba) y $l^\infty(H_h^1(\Omega_{t_n}))$ (abajo) tomando $\sigma_1 = 0.001$. Fijamos el paso temporal, $\Delta t = 2\pi/2000$, variamos la malla espacial desde $N_x = N_y = 1/25$ hasta $N_x = N_y = 1/133$.

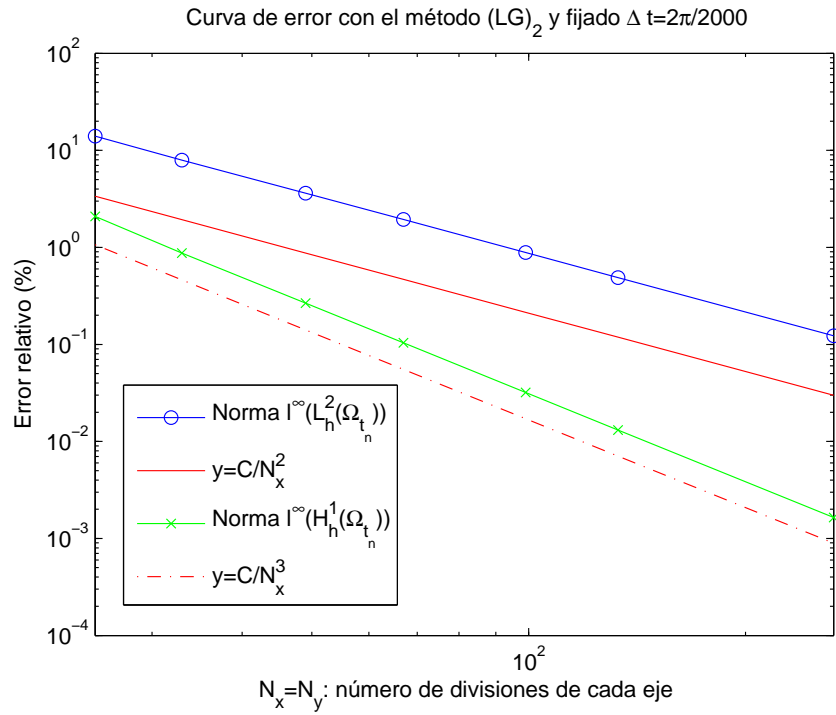
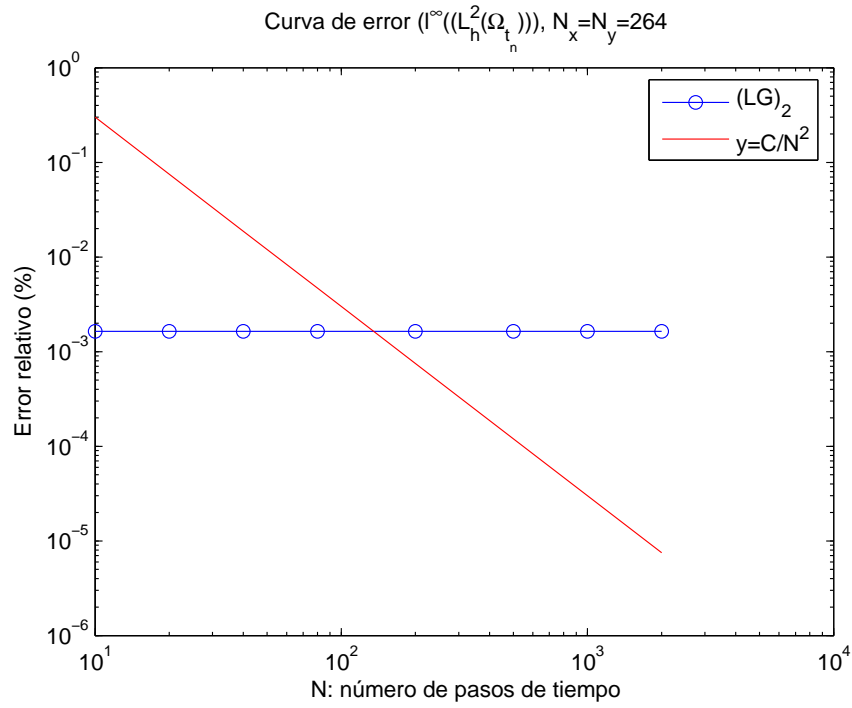


Figura 4.3: Errores relativos en escala logarítmica para el Ejemplo 1 tomando $\sigma_1 = 0$.

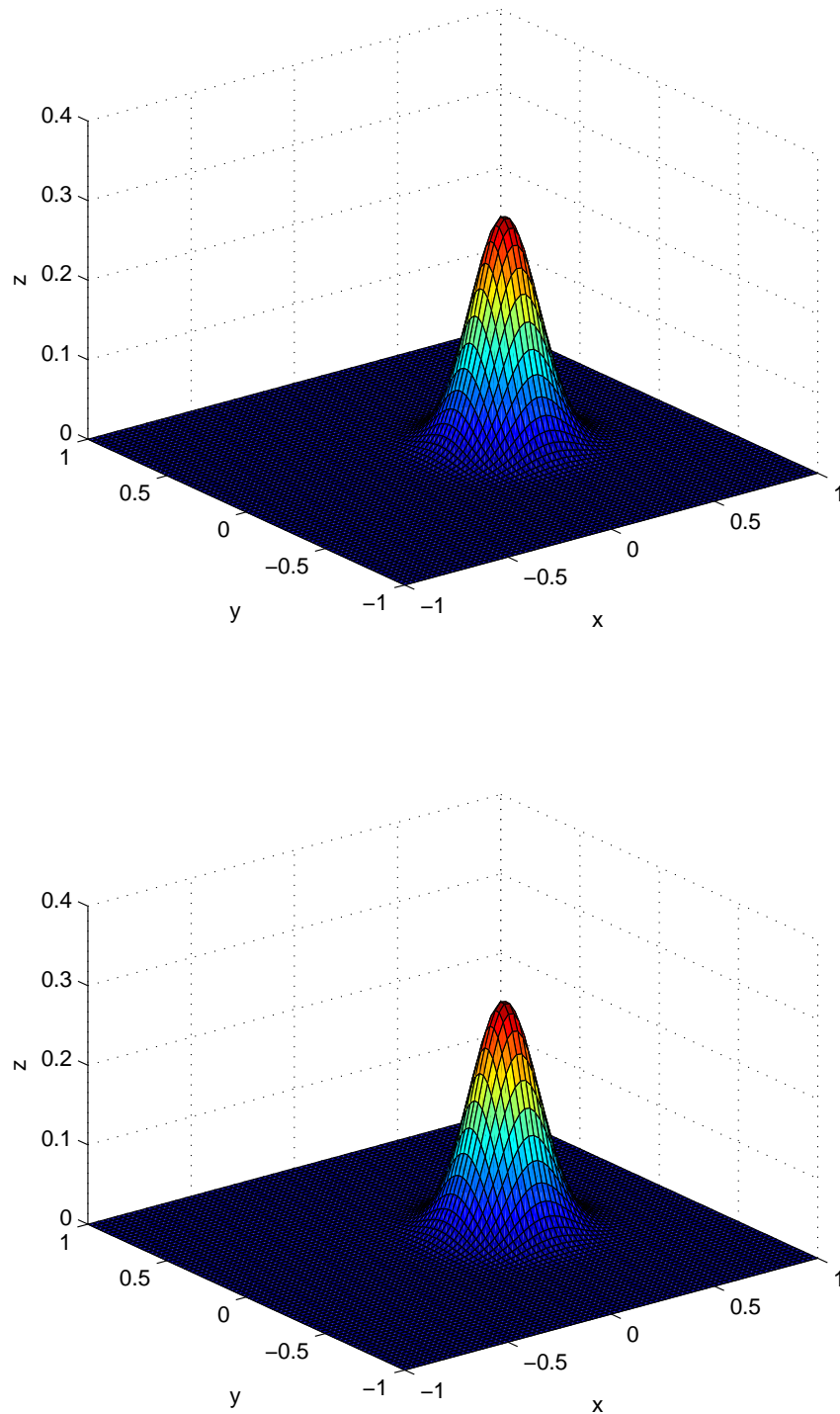


Figura 4.4: Solución exacta (arriba) y solución numérica (abajo) calculada utilizando el método $(\mathcal{LG})_2$, del Ejemplo 1 en el instante final $T = 2\pi$, tomando $\sigma_1 = 0.001$ y $N_x = N_y = 1/133$ y $\Delta t = 2\pi/100$.

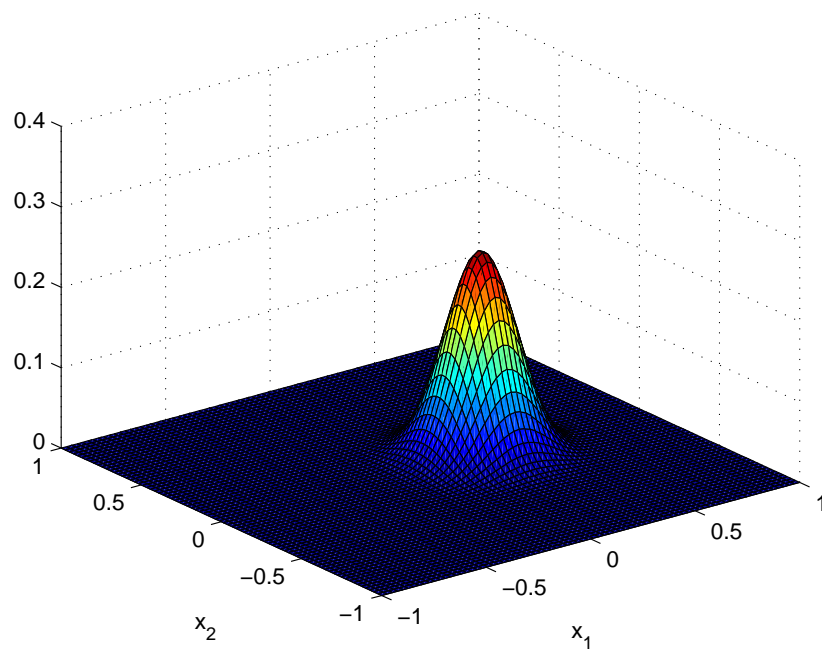
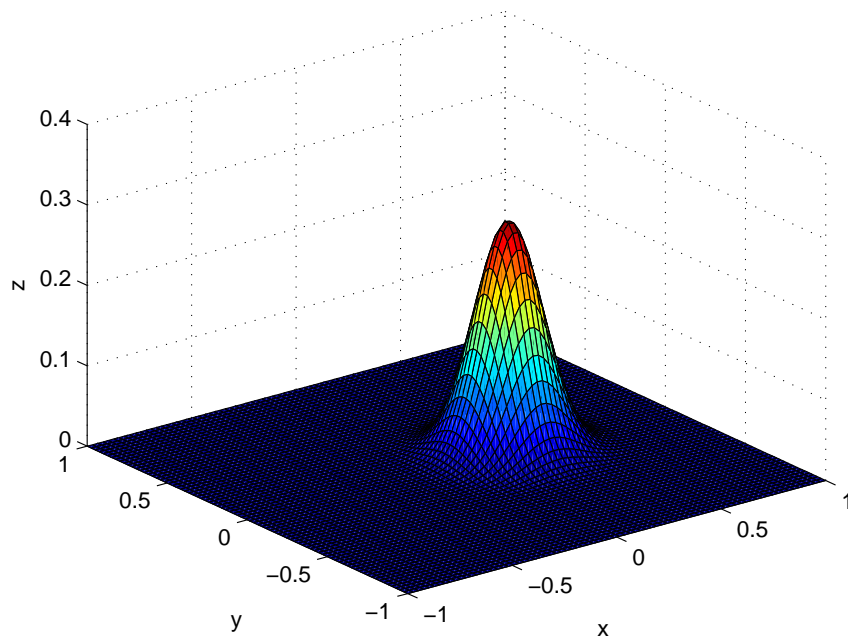


Figura 4.5: Solución exacta (arriba) y solución numérica (abajo) calculada utilizando el método clásico de características, del Ejemplo 1 en el instante final $T = 2\pi$, tomando $\sigma_1 = 0.001$, $N_x = N_y = 1/133$ y $\Delta t = 2\pi/400$.

Ejemplo 2

En este ejemplo, tomado de [29], consideramos el problema de convección-difusión (1.8) con dominio de referencia $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, tiempo final $T = 1$, y coeficientes

$$\mathbf{v} = \nabla\psi, \quad A = \sigma_1 I, \quad f = 0, \quad \rho = 1,$$

siendo

$$\psi = (1 - \cos(2\pi x_1))(1 - \cos(2\pi x_2)), \quad \sigma_1 = 0.001.$$

El dato inicial varía de $\phi^0(0, 0) = 0$ a $\phi^0(1, 1) = 1$ de acuerdo con la siguiente expresión

$$\phi^0(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi < 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi\xi)) & \text{si } 0 \leq \xi \leq 1, \\ 1 & \text{si } 1 < \xi, \end{cases} \quad (4.63)$$

donde $\xi = x_1 + x_2 - 1/2$. Nótese que el campo de velocidades se anula sobre la frontera, por tanto $\Omega_t = \Omega$ para todo $t \in [0, 1]$. Imponemos condiciones de contorno Dirichlet en toda la frontera de Ω , dada por el dato inicial ϕ^0 , es decir, $\phi_D = \phi^0|_{\Gamma}$. En la Figura 4.6 representamos la velocidad y el dato inicial. Resolvemos este problema utilizando los métodos lagrangianos $(\mathcal{LG})_1$ y $(\mathcal{LG})_2$, y también usan-

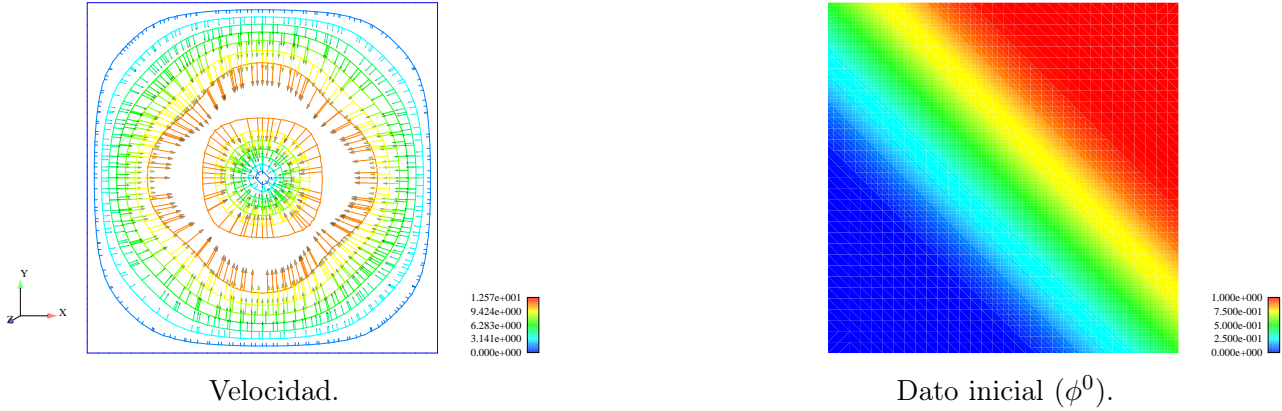


Figura 4.6: Velocidad y dato inicial para el Ejemplo 2.

do los métodos semi-lagrangianos (1.64) y (1.66), que denotamos, respectivamente, por $(\mathcal{SLG})_2^1$ (método semi-lagrangiano de segundo orden de un paso) y por $(\mathcal{SLG})_2^2$ (método semi-lagrangiano de segundo orden de dos pasos). Nótese que el método $(\mathcal{SLG})_2^1$ es análogo al método $(\mathcal{LG})_2$, teniendo en cuenta que en el primero el movimiento es reinicializado a la identidad en cada paso de tiempo mientras que en el segundo se vuelve a la configuración de referencia.

Cálculo de la solución en coordenadas espaciales

Los métodos $(\mathcal{LG})_2$ y $(\mathcal{SLG})_2^1$, en cada paso $1 \leq n \leq N$, proporcionan aproximaciones de $\phi_m(p, t_n)$ (que denotamos por $\phi_{m,\Delta t,h}^n(p)$) y $\phi(X_e^n(P(x, t_{n-1})), t_n)$ (que denotamos por $\phi_{n-1,\Delta t,h}^n(x)$), respectivamente. Para construir las correspondientes aproximaciones de $\phi(x, t_n)$ tenemos que mover los puntos hacia atrás e interpolar:

$$\phi(x, t_n) \sim \phi_{m,\Delta t,h}^n(P(x, t_n)), \quad (4.64)$$

$$\phi(x, t_n) \sim \phi_{n-1,\Delta t,h}^n(X_e^{n-1}(P(x, t_n))) \quad (4.65)$$

Para mover los puntos utilizamos el método de Runge-Kutta que empleamos en (1.106). Nótese que esta fórmula proporciona orden $O(\Delta t^2)$ para el método $(\mathcal{LG})_2$, puesto que tenemos que dar n pasos, mientras que para el método $(\mathcal{SLG})_2^1$ como sólo damos un paso cometemos un error de orden $O(\Delta t^3)$. En general, estas soluciones aproximadas así construidas no pertenecen al espacio de elementos finitos que estamos considerando, sin embargo para calcular su norma se proyectan en dicho espacio.

Influencia de la integración numérica

En los métodos semi-Lagrangianos las integrales que provienen de la semi-discretización temporal y que forman parte del segundo miembro son términos de la forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \zeta^n(y) \phi_{n-1, \Delta t, h}^n \circ X_e^{n-1}(P(y, t_n)) \psi_h(y) dy \quad ((\mathcal{SLG})_2^1), \\ & \frac{2}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi_{\Delta t, h}^n \circ X_e^n(P(y, t_{n+1})) \psi_h(y) dy, \quad \frac{1}{2\Delta t} \int_{\Omega} \phi_{\Delta t, h}^{n-1} \circ X_e^{n-1}(P(y, t_{n+1})) \psi_h(y) dy \quad ((\mathcal{SLG})_2^2), \end{aligned}$$

siendo $\phi_{\Delta t, h}$ la solución numérica obtenida utilizando el método $(\mathcal{SLG})_2^2$. Estas integrales no se pueden calcular exactamente. Por lo que utilizando la integración numérica, cabe esperar, como en otras situaciones que han sido analizadas (véase por ejemplo [55]), que se añadirán al error términos de la forma $O(h^s/\Delta t)$, siendo s dependiente de la fórmula de cuadratura utilizada. En las simulaciones hemos observado dichos errores cuando se utilizan fórmulas de cuadratura de bajo orden (por ejemplo, **C3**) y se reduce el paso temporal, ocasionando la inestabilidad de los métodos. Sin embargo, para el método Lagrangiano que presentamos en este trabajo $(\mathcal{LG})_2$ y para el análogo de orden uno $(\mathcal{LG})_1$ no se observan dichos errores. Nótese que, en estos casos, debemos integrar un término de la forma

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \zeta^n(y) \phi_{m, \Delta t, h}(y) \psi_h(y) dy \quad .$$

Sin embargo los métodos lagrangianos $(\mathcal{LG})_2$ y $(\mathcal{LG})_1$ presentan inestabilidades cuando se utiliza la fórmula de cuadratura de los puntos medios de las aristas para calcular las integrales. Nótese que utilizando esta fórmula la matriz de masa es diagonal, con ceros en los elementos de la diagonal correspondientes a los vértices del mallado, por lo que se trata de una matriz singular. Entonces, dependiendo de las condiciones de contorno y del coeficiente de difusión el sistema puede ser singular o no. Por ejemplo para el problema de transporte la matriz es siempre singular.

Análisis de los resultados numéricos

En los métodos semi-Lagrangianos los puntos $(X_e)_\tau(y, t)$, para todo t y τ , se calculan utilizando el método de Runge-Kutta de orden dos que empleamos en (1.106), cometiendo un error de orden $O(\Delta t^3)$. Por otro lado para calcular el primer paso en el método de dos pasos $(\mathcal{SLG})_2^2$ utilizamos un método de primer orden en tiempo.

En primer lugar, analizamos los tiempos de cálculo para los distintos métodos. Estos datos los presentamos en la Tabla 4.1. Se observa que el método $(\mathcal{SLG})_2^2$ es el más rápido, mientras que el método $(\mathcal{LG})_2$ el más lento. Nótese que la matriz correspondiente al método $(\mathcal{SLG})_2^2$ es independiente del paso de tiempo, por lo que sólo se calculará y factorizará una vez; además, la parte del segundo miembro que en principio sería de mayor gasto computacional es la correspondiente a la búsqueda de los pies de las características. El algoritmo de búsqueda que estamos utilizando se introduce en [5] siendo el tiempo de dicha búsqueda despreciable cuando estamos próximos al elemento de partida, como ocurre con los métodos $(\mathcal{SLG})_2^1$ y $(\mathcal{SLG})_2^2$, puesto que sólo estamos dando un paso. El método $(\mathcal{SLG})_2^1$ resulta menos eficiente que $(\mathcal{SLG})_2^2$, fundamentalmente por dos razones: la matriz varía en cada paso de tiempo y en el segundo miembro

aparece un término correspondiente a la rigidez. El método $(\mathcal{LG})_2$ resulta menos eficiente que estos dos, fundamentalmente por los siguientes motivos

- La matriz varía en cada paso de tiempo.
- En el segundo miembro se añade un término correspondiente a la rigidez.
- Para calcular la solución aproximada en coordenadas espaciales, en cada paso de tiempo hay que mover los puntos del mallado (espacial) hasta la configuración de referencia y hacer una búsqueda (ver ecuación (4.64)). Para realizar esta búsqueda se desconoce un elemento de partida próximo al punto movido. Por este motivo esta parte de código requiere un elevado coste computacional. Concretamente, para el caso que presentamos en la Tabla 4.1, esta parte se realiza en 5.207031 s.

	Matriz	Seg. Miembro	Total
$(\mathcal{LG})_2$	3.515625	5.250000	16.72656
$(\mathcal{SLG})_2^1$	3.515625	8.207031	13.94922
$(\mathcal{SLG})_2^2$	1.17187E-02	1.621094	1.988281

Tabla 4.1: Tiempos de cálculo (en segundos) ($N = 100$, $h = 1/32$, (C6)).

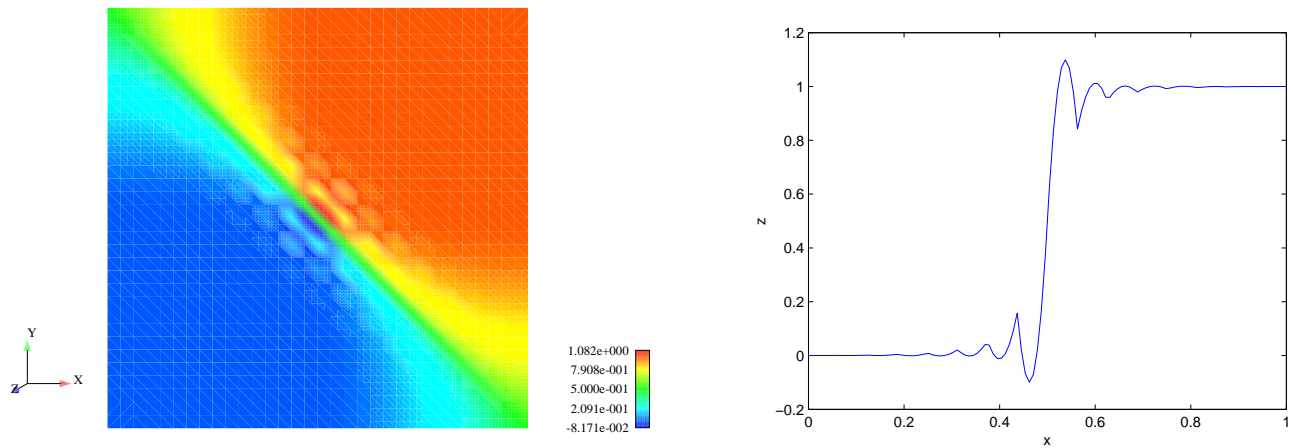
Calculamos la norma $\|\phi_{h,\Delta t}^m\|_{1,2,\Omega}$ en distintos pasos y para los diferentes métodos. Los resultados se muestran en la Tabla 4.2. En las Figuras 4.7 y 4.8 representamos las soluciones aproximadas en el instante final

Método Numérico tiempo (t)	$(\mathcal{LG})_2$	$(\mathcal{LG})_1$	$(\mathcal{SLG})_2^1$	$(\mathcal{SLG})_2^2$
0	1.4493	1.4493	1.4493	1.4493
1/6	3.2350	3.4496	3.3067	3.6304
1/3	3.3497	3.1667	3.3536	3.7300
1/2	3.3687	3.1290	3.3605	3.7622
2/3	3.3776	3.1398	3.3628	3.7722
5/6	3.3829	3.1440	3.3637	3.7758
1	3.3828	3.1448	3.3640	3.7772

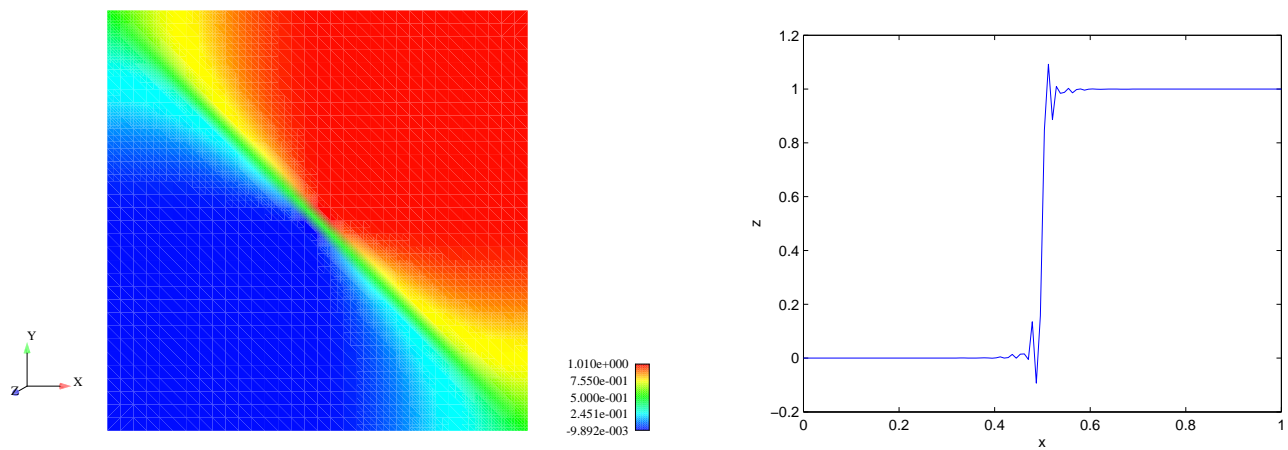
Tabla 4.2: Norma $H^1(\Omega)$ de la solución aproximada ($h = 1/16$, $\Delta t = 1/60$).

$T = 1$ calculadas usando los métodos semi-Lagrangianos $(\mathcal{SLG})_1^2$ y $(\mathcal{SLG})_2^1$, y los métodos Lagrangianos $(\mathcal{LG})_1$ y $(\mathcal{LG})_2$, respectivamente. Los métodos semi-Lagrangianos $(\mathcal{SLG})_2^1$ y $(\mathcal{SLG})_2^2$ con mallas de tamaño $h = 1/16$ no aproximan con precisión la capa delgada que se forma en la diagonal, de manera que se observa el fenómeno de Gibbs en las secciones $x_1 \rightarrow \phi_{\Delta t,h}^N(x_1, 1/2)$, como se pone de manifiesto en la Figura 4.7. Sin embargo, estas oscilaciones no se producen con el método Lagrangiano que analizamos en este trabajo $((\mathcal{LG})_2)$ ni con el análogo de orden 1 $((\mathcal{LG})_1)$. Concretamente, con estos métodos obtenemos una solución numérica que aproxima con precisión incluso en la capa de transición y con mallados groseros. En la Figura 4.9 ilustramos la solución numérica, $\phi_{m,\Delta t,h}^N$, obtenida utilizando el método Lagrangiano que proponemos en este trabajo. En [29] se considera para este problema un método semi-Lagrangiano (análogo a $(\mathcal{SLG})_2^1$) que se resuelve numéricamente utilizando para la discretización espacial el método (clásico) de elementos finitos cuadráticos discontinuos y para la discretización temporal polinomios cuadráticos sobre cada intervalo de tiempo (t_{n-1}, t_n) . La solución numérica calculada utilizando este método también presenta oscilaciones cerca de la capa de transición incluso para mallas más finas que las que estamos

considerando ($h = 1/32$). En dicho trabajo también se muestran las soluciones obtenidas utilizando el método clásico de Galerkin. Se muestra que para mallados groseros el método clásico de Galerkin es inestable. Además, las soluciones calculadas con dicho método presentan oscilaciones incluso lejos de la capa de transición.



Método $(\mathcal{SLG})_2^2$.



Método $(\mathcal{SLG})_2^1$.

Figura 4.7: Contornos de la solución aproximada $\phi_{\Delta t, h}^N$ y las secciones $x_1 \rightarrow \phi_{\Delta t, h}^N(x_1, 1/2)$ calculada con el método $(\mathcal{SLG})_2^2$ (arriba) y el método $(\mathcal{SLG})_2^1$ (abajo), $h = 1/16$, $\Delta t = 1/60$, **(C3)**.

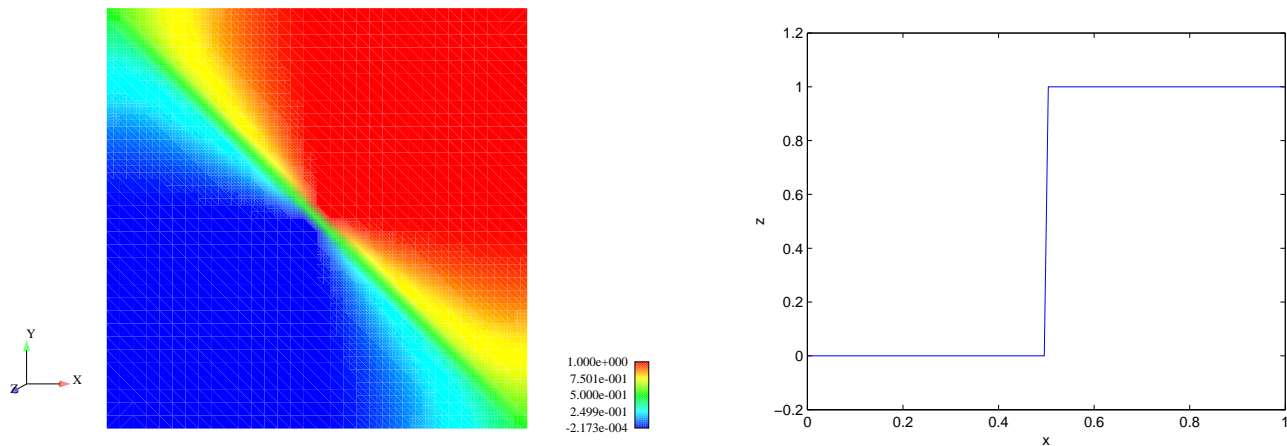
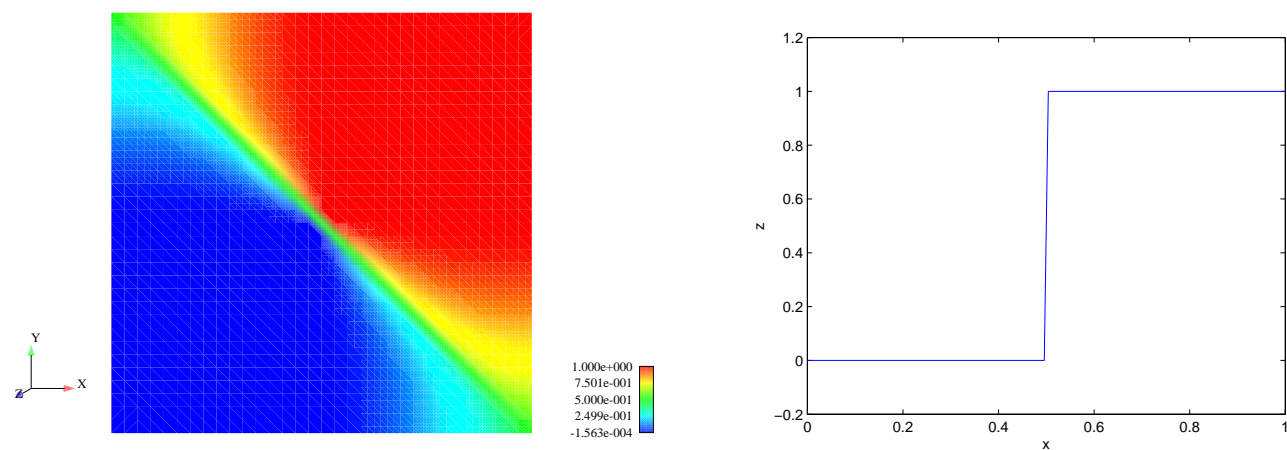
Método $(\mathcal{LG})_1$.Método $(\mathcal{LG})_2$.

Figura 4.8: Contornos de la solución aproximada $\phi_{\Delta t, h}^N$ y las secciones $x_1 \longrightarrow \phi_{\Delta t, h}^N(x_1, 1/2)$ calculada con el método $(\mathcal{LG})_1$ (arriba), $(\mathcal{LG})_2$ (abajo), $h = 1/16$, $\Delta t = 1/60$, **(C3)**.

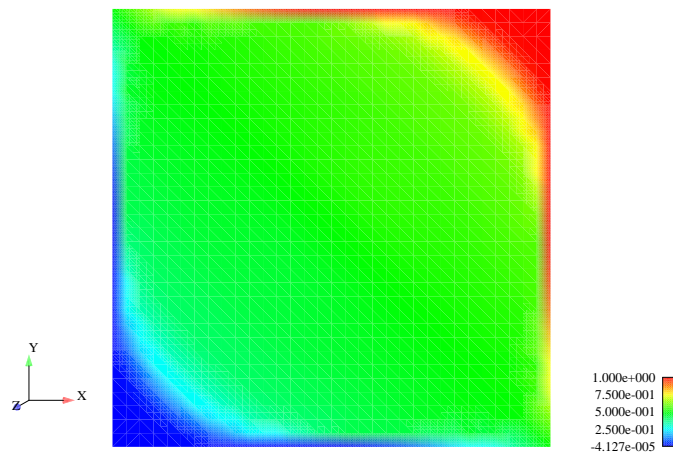


Figura 4.9: Contornos de la solución aproximada $\phi_{m,\Delta t,h}^N$ calculada utilizando el método $(\mathcal{LG})_2$, $h = 1/16$, $\Delta t = 1/60$, **(C3)**.

Parte II

Método PSI

Introducción

Las ecuaciones de convección-difusión presentan numerosas aplicaciones en Ingeniería y ciencias aplicadas. Para asegurar que las soluciones numéricas reproduzcan las propiedades físicas del problema es esencial obtener métodos numéricos que verifiquen el principio del máximo, lo que nos asegura la positividad y la monotonía de la solución numérica. Además, para las aplicaciones a problemas reales, necesitamos obtener métodos numéricos que sean precisos. Es bien conocido que ningún esquema lineal puede reunir estas dos propiedades [80]. En concreto, el teorema de Godunov (ver [79]) establece que no existe ningún esquema lineal para la ecuación de convección unidimensional que sea positivo y de segundo orden. Por ello, se han utilizado diferentes técnicas de discretización no lineales, por ejemplo, métodos de características, métodos de Galerkin discontinuos (ver [32], [33]) o métodos distributivos.

Los métodos distributivos fueron introducidos por Roe [69] en los años 80. La idea base de estos métodos es distribuir el flujo convectivo en cada elemento del mallado entre los nodos situados corriente abajo. Estos métodos son positivos y, en algunos casos, de segundo orden. Además, presentan buenas propiedades, lo que hace de ellos una herramienta eficaz para la resolución numérica de problemas de convección. Podemos citar, entre otras:

- Son esquemas basados en una estructura de elementos finitos.
- Son menos difusivos que los métodos de volúmenes finitos (al menos para el cálculo estacionario).
- Los cálculos sobre cada elemento se realizan teniendo en cuenta sólo los elementos vecinos.
- Son esquemas descentrados por construcción, ya que distribuyen el flujo sólo entre los nodos que están corriente abajo.

Dos de los principales esquemas distributivos son el N-esquema (Narrow) y el PSI (Positive Streamwise Implicit). En principio estos métodos se introducen para resolver las ecuaciones de convección, sin embargo el N-esquema fue extendido por Deconick, Struijs y más recientemente por Abgrall, entre otros, (ver por ejemplo [1], [2], [3], [36], [59], [74], [75]) para resolver sistemas hiperbólicos de leyes de conservación.

El N-esquema es lineal, positivo y uno de los esquemas distributivos más importantes de primer orden. En la literatura se han obtenido resultados teóricos para este esquema. En concreto, Perthame en [61] y [62] analiza la convergencia del método para las ecuaciones de convección transitorias, obteniendo convergencia fuerte en norma L^2 . Este análisis se basa en una interpretación del esquema como un método de volúmenes finitos.

El PSI es otro de los métodos distributivos más destacados. Este método, introducido en [36], es una extensión de segundo orden para el estado estacionario del N-esquema. Sildikover y Roe [70] mostraron que este esquema se puede obtener aplicando la función limitador Min-Mod al N-esquema, resultando un esquema positivo, no lineal pero de segundo orden. Además, este método es particularmente preciso en

zonas de grandes gradientes o discontinuidades de la solución. Por lo tanto el método PSI es una buena alternativa a los métodos de características para la discretización del término convectivo, puesto que es de alto orden para problemas de convección dominante.

En la literatura encontramos escasos resultados teóricos referentes a este método, citamos algunos de ellos. En [25] se estudia el método PSI combinado con un método de Galerkin estándar, para resolver una ecuación de convección-difusión estacionaria. Este análisis se basa en una interpretación del esquema como un método no lineal de tipo Petrov-Galerkin. Se prueba la existencia y cuasi-unicidad de solución para el problema discreto. La unicidad de solución es un problema abierto debido a la no linealidad del método. Se obtiene convergencia fuerte de primer orden en norma H^1 , y se prueba que el método es bien equilibrado al segundo orden para flujos de convección dominante, es decir, el error de consistencia para el problema estacionario es de segundo orden. También se demuestra que se verifica el principio del máximo y se obtienen estimaciones para las soluciones discretas. Se presentan resultados numéricos que evidencian que el método para el problema evolutivo es de primer orden incluso en norma L^2 .

En el *Capítulo 5*, en primer lugar planteamos un problema de convección-difusión. Obtenemos una formulación variacional del problema y planteamos una discretización espacial utilizando elementos finitos \mathbb{P}_1 . Proponemos una discretización del término convectivo utilizando los métodos distributivos habituales que se aplican a la ecuación de transporte evolutiva, para ello introducimos una formulación general de estos esquemas. En segundo lugar presentamos dos de los métodos distributivos más importantes, ya citados: el N-esquema y el esquema PSI para el caso bidimensional. Recordamos algunas propiedades probadas en la literatura para estos métodos.

En el *Capítulo 6*, proponemos una discretización temporal utilizando un método de Crank-Nicholson y planteamos una discretización del término convectivo utilizando el método PSI. Presentamos algunos resultados numéricos que corroboran los resultados teóricos que se han obtenido en la literatura respecto al orden de error del método.

Capítulo 5

Discretización espacial de las ecuaciones de convección-difusión. Método PSI.

5.1. Introducción

En esta sección planteamos un problema de convección-difusión evolutivo. Obtenemos una formulación débil. Planteamos una discretización espacial utilizando elementos finitos lineales. Una posible estrategia de discretización del término convectivo, que proporcione aproximaciones precisas y estables, es utilizar métodos distributivos. En este trabajo introducimos de forma rigurosa la técnica general de discretización de dicho término mediante los métodos distributivos. En particular, proponemos dos de los métodos distributivos más importantes: el N-esquema y el esquema PSI. El primero de ellos es lineal, positivo y de primer orden. El segundo es no lineal diseñado para ser positivo y de alto orden.

5.2. Problema de Cauchy

Adoptamos la notación introducida en la Sección 1.2. Consideramos el siguiente problema mixto de valores iniciales y de contorno.

Problema fuerte: *Encontrar una función $\phi : \Omega \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\rho(x) \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) + \rho(x) \mathbf{v}(x, t) \cdot \text{grad } \phi(x, t) - \text{div}(A(x) \text{grad } \phi(x, t)) = f(x, t), \quad (5.1)$$

para $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$, sujeta a la condición de contorno

$$\phi(\cdot, t) = \phi_D(\cdot, t) \text{ en } \Gamma, \quad (5.2)$$

para $t \in [0, T]$, y a la condición inicial

$$\phi(x, 0) = \phi^0(x) \text{ en } \Omega. \quad (5.3)$$

En las ecuaciones, $A : \Omega \longrightarrow \text{Sym}$ denota el coeficiente (tensorial) de difusión siendo Sym el espacio de los tensores simétricos, $\mathbf{v} : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathcal{V}$ es la velocidad, $\rho : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas. Además la función ρ verifica

$$\rho(x) \geq \gamma > 0 \quad \text{c.p.d } x \in \Omega.$$

Para simplificar la presentación de los esquemas, asumimos que la velocidad \mathbf{v} tiene divergencia nula, $\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv 0$.

En adelante supondremos que $\phi_D \equiv 0$, sin pérdida de generalidad, cambiando f si fuese necesario.

5.3. Formulación débil

El objetivo de esta sección es obtener una formulación débil del problema (5.1)-(5.3). Multiplicando la ecuación (5.1) por una función test $\psi \in H_0^1(\Omega) := \{z \in H^1(\Omega) : z|_\Gamma \equiv 0\}$, integrando en Ω y aplicando la fórmula usual de Green en la parte correspondiente al término de difusión, teniendo en cuenta que $\psi \equiv 0$ en Γ , obtenemos

Problema débil: Encontrar una función $\phi(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x) \phi(x, t) \psi(x) dx + \int_{\Omega} \rho(x) (\mathbf{v}(x, t) \cdot \operatorname{grad} \phi(x, t)) \psi(x) dx \\ & + \int_{\Omega} A(x) \operatorname{grad} \phi(x, t) \cdot \operatorname{grad} \psi(x) dx \\ & = \int_{\Omega} f(x, t) \psi(x) dx, \end{aligned} \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \text{ en } \mathcal{D}'(0, T); \quad (5.4)$$

sujeta a la condición inicial

$$\phi(x, 0) = \phi^0(x) \text{ en } \Omega. \quad (5.5)$$

Para realizar estos cálculos formales asumimos regularidad suficiente de las funciones involucradas.

5.4. Discretización espacial: método de elementos finitos.

Consideramos una familia de triangulaciones $(\mathcal{T}_h)_h$, donde h denota el mayor de los diámetros de los elementos de \mathcal{T}_h . Supondremos que \mathcal{T}_h verifica las siguientes propiedades:

- i) $\overline{\Omega}_h := \cup \{T : T \in \mathcal{T}_h\} \subset \overline{\Omega}$.
- ii) Para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$, existe un valor $h_0(K) > 0$ tal que $K \subset \overline{\Omega}_h$ para todo h con $h < h_0(K)$.
- iii) Dados T_1 y T_2 dos elementos distintos de la malla, se verifica que $\overset{\circ}{T}_1 \cap \overset{\circ}{T}_2 = \emptyset$.
- iv) Toda arista (respectivamente, cara) de cualquier elemento $T \in \mathcal{T}_h$ pertenece a $\partial\Omega_h$ o bien es una arista (respectivamente, cara) de otro elemento $T' \in \mathcal{T}_h$.

Definimos el espacio V_h formado por las funciones continuas en $\overline{\Omega}$ que son afines sobre cada elemento T de \mathcal{T}_h y que se anulan en $\overline{\Omega} \setminus \Omega_h$, con $\Omega_h = \operatorname{int}(\overline{\Omega}_h)$, es decir

$$V_h := \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) : v_h = 0 \text{ en } \overline{\Omega} \setminus \Omega_h, v_h|_T \in \mathbb{P}_1, \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Se tiene que $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ siendo una aproximación de dimensión finita de $H_0^1(\Omega)$. En concreto, toda función de V_h está unívocamente determinada por los valores en los vértices interiores de cada elemento

del mallado. Por tanto los nodos de la malla se corresponden con los vértices interiores de cada elemento de la triangulación.

Utilizamos la siguiente notación:

$a_i, i = 1, \dots, N_v$, son los vértices de la malla,

I , es el conjunto de índices correspondientes a los vértices interiores de la malla,

B , es el conjunto de índices correspondientes a los vértices frontera de la malla.

Para todo vértice a_i de \mathcal{T}_h , con $i \in I \cup B$, definimos la función φ_i como

$$\begin{cases} \varphi_i \in C^0(\overline{\Omega}_h), & \varphi_i|_T \in \mathbb{P}_1, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \\ \varphi_i(a_i) = 1, & \varphi_i(a_j) = 0 \text{ para todo vértice } a_j \text{ de } \mathcal{T}_h \text{ con } a_j \neq a_i. \end{cases}$$

Entonces, se tiene

$$\sum_{i \in I \cup B} \varphi_i = 1 \quad \text{en } \Omega_h.$$

Nótese que, para $i \in I$, la función φ_i pertenece al espacio funcional $H_0^1(\Omega_h)$; además, extendiendo φ_i por cero a $\overline{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_h$, obtenemos una función de V_h que, cometiendo un abuso de notación, denotamos por φ_i . Las funciones $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ forman una base del espacio V_h .

Definimos el operador de interpolación Π_h como

$$\begin{cases} \forall v \in C^0(\overline{\Omega}), & \Pi_h(v) \in V_h, \\ (\Pi_h(v))(a_i) = v(a_i) & \text{para todo vértice interior } a_i \text{ de } \mathcal{T}_h, \end{cases}$$

o equivalentemente,

$$\Pi_h(v) = \sum_{i \in I} v(a_i) \varphi_i. \quad (5.6)$$

Proponemos una discretización espacial utilizando el espacio de elementos finitos V_h . Concretamente, consideramos el siguiente problema

Problema débil semidiscretizado: *Encontrar una función $\phi_h(\cdot, t) \in V_h$ tal que*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x) \phi_h(x, t) \psi_h(x) dx + \int_{\Omega} \rho(x) (\mathbf{v}(x, t) \cdot \text{grad } \phi_h(x, t)) \psi_h(x) dx \\ & + \int_{\Omega} A(x) \text{grad } \phi_h(x, t) \cdot \text{grad } \psi_h(x) dx \\ & = \int_{\Omega} f(x, t) \psi_h(x) dx, \end{aligned} \quad \forall \psi_h \in V_h \text{ en } \mathcal{D}'(0, T); \quad (5.7)$$

sujeta a la condición inicial

$$\phi_h(\cdot, 0) = \Pi_h(\phi^0). \quad (5.8)$$

5.5. Discretización del término convectivo

En esta sección vamos a introducir la técnica general de discretización del término convectivo

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{v} \cdot \text{grad } \phi_h) \psi_h dx, \quad (5.9)$$

mediante métodos distributivos.

En primer lugar, recordamos la expresión del flujo total de la magnitud ϕ_h , transportada por la velocidad \mathbf{v} , que atraviesa la frontera de un subconjunto $V \subset \Omega$,

$$\sigma^V(\mathbf{v}) = \int_{\partial V} \phi_h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA_x, \quad (5.10)$$

siendo \mathbf{n} el vector normal unitario exterior a ∂V . Aplicando la fórmula usual de Green, teniendo en cuenta que el flujo es incompresible, se tiene la siguiente expresión para el flujo σ^V

$$\sigma^V(\mathbf{v}) = \int_V \operatorname{div}(\phi_h \mathbf{v}) dx = \int_V \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \phi_h dx. \quad (5.11)$$

En general, omitimos la dependencia de la velocidad que se tiene para el flujo, salvo en las ocasiones que sea necesario.

La idea de los métodos distributivos es repartir el flujo total σ^T sobre un elemento T del mallado, en principio, entre los nodos de los elementos vecinos a T . Esta distribución se realiza mediante unos “coeficientes de distribución” $\{\beta_i^T\}_{i \in I \cup B}$ con $\beta_i^T \geq 0$, de tal forma que al nodo a_i le corresponde la parte del flujo dada por

$$\sigma_i = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sigma_i^T, \quad \text{con } \sigma_i^T = \beta_i^T \sigma^T,$$

siendo σ_i^T la parte del flujo sobre el elemento T que le corresponde al nodo a_i . En la práctica, resulta más sencillo repartir el flujo σ^T únicamente entre los nodos del elemento T . Por lo que vamos a considerar nulos los coeficientes β_i^T para los nodos a_i que no pertenecen a T . Entonces, si denotamos por E_i el conjunto de los elementos del mallado para los que a_i es un vértice, se tiene que

$$\sigma_i = \sum_{T \in E_i} \beta_i^T \sigma^T.$$

Vamos a aproximar la integral (5.9) utilizando esta idea de distribución de flujos. Introducimos unas funciones constantes por elemento y definidas casi por doquier en $\overline{\Omega}$, $\{\lambda_i\}_{i \in I \cup B}$, tales que $\lambda_i|_T = \beta_i^T$, $\forall T \in \mathcal{T}_h$, $i \in I \cup B$. Para $i \in I \cup B$ extendemos λ_i por cero a $\overline{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_h$, de esta manera obtenemos una función definida casi por doquier en $\overline{\Omega}$. Aproximamos las funciones de base $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ por las funciones $\{\lambda_i\}_{i \in I}$. Denotamos por W_h el espacio engendrado por las funciones $\{\lambda_i\}_{i \in I}$, es decir

$$W_h = \langle \{\lambda_i\}_{i \in I} \rangle. \quad (5.12)$$

En lugar de usar el espacio V_h para las funciones test, usaremos el espacio W_h , con funciones constantes por elemento. Introducimos el operador de interpolación sobre W_h , $\overline{\Pi}_h(w)$, definido para $w \in C^0(\overline{\Omega})$, como

$$(\overline{\Pi}_h(w))(x) = \sum_{i \in I} w(a_i) \lambda_i(x), \quad \text{c.p.d } x \in \overline{\Omega}. \quad (5.13)$$

Entonces, usamos W_h como espacio de las funciones test para el término convectivo

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \phi_h) \psi_h dx \simeq \int_{\Omega} \rho(\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \phi_h) \overline{\Pi}_h(\psi_h) dx. \quad (5.14)$$

Además, imponemos que la función $w \equiv 1$ sea interpolada por $\overline{\Pi}_h$ de forma exacta sobre $\overline{\Omega}_h$. Esto equivale a

$$\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_{i_T}|_T = 1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h,$$

donde i_T denota el índice global del i -ésimo vértice del elemento T , $i = 1, \dots, d+1$. Entonces, los coeficientes β_i^T deben verificar

$$\sum_{i=1}^{d+1} \beta_{i_T}^T = 1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (5.15)$$

Esta condición se impone habitualmente a los coeficientes de distribución. En [58] se prueba que bajo esta condición estos esquemas son conservativos cuando se aplican a la ecuación de transporte evolutiva y se combinan con la técnica de “mass-lumping” para la discretización temporal.

De esta forma, el flujo total sobre el elemento T es la suma del flujo correspondiente a cada vértice

$$\sigma^T = \sum_{i=1}^{d+1} \sigma_{i_T}^T = \sum_{i=1}^{d+1} \beta_{i_T}^T \sigma^T.$$

Todavía tenemos que concretar la expresión de la discretización del término convectivo. Aproximamos la velocidad \mathbf{v} por $\bar{\mathbf{v}}$, siendo $\bar{\mathbf{v}}$ una función constante por elemento. Concretamente reemplazamos $\mathbf{v}|_T$ por su promedio sobre T , es decir

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{v} \cdot \text{grad } \phi_h) \bar{\Pi}_h(\psi_h) dx \simeq \int_{\Omega} \rho(\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h) \bar{\Pi}_h(\psi_h) dx \quad \text{con } \bar{\mathbf{v}}|_T = \frac{1}{|T|} \int_T \mathbf{v} dx.$$

Dado $v_h \in V_h$ denotamos por v_i al valor que toma v_h en a_i , $v_i = v_h(a_i)$, $i \in I \cup B$. Nótese que el vector $(v_i)_{i \in I}$ representa el conjunto de coordenadas de v_h respecto a la base natural de V_h . Entonces, utilizando esta notación se tiene que

$$\bar{\Pi}_h(\psi_h) = \sum_{i \in I} \psi_i \lambda_i.$$

De esta manera podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho(\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h) \bar{\Pi}_h(\psi_h) dx &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \rho(\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h) \bar{\Pi}_h(\psi_h) dx \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^{d+1} \psi_{i_T} \int_T \rho(\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h) \lambda_{i_T} dx. \end{aligned}$$

Además, teniendo en cuenta que $\bar{\mathbf{v}}$, $\text{grad } \phi_h$ y λ_{i_T} son constantes por elemento, se tiene

$$\int_T \rho(\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h) \lambda_{i_T} dx = \int_T \bar{\rho}(\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h) \lambda_{i_T} dx \quad \text{con } \bar{\rho}|_T = \frac{1}{|T|} \int_T \rho dx.$$

Entonces, se tiene

$$\int_{\Omega} \rho(\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h) \bar{\Pi}_h(\psi_h) dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \bar{\rho}|_T \sum_{i=1}^{d+1} \psi_{i_T} \beta_{i_T}^T \sigma^T,$$

siendo

$$\sigma^T = - \int_{\partial T} \phi_h \bar{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\eta}^T dA_x, \quad (5.16)$$

donde $\boldsymbol{\eta}$ es el vector normal unitario interior a ∂T . Teniendo en cuenta que ϕ_h es afín sobre ∂T y que la regla del trapecio es exacta para polinomios de \mathbb{P}_1 , obtenemos

$$\sigma^T = - \sum_{j=1}^{d+1} \int_{\Gamma_j} \phi_h \bar{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\eta}^T dA_x = - \sum_{j=1}^{d+1} \left(\frac{1}{d} \sum_{i \neq j} \phi_{i_T} \right) \bar{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\eta}_j^T, \quad (5.17)$$

donde Γ_j es la arista ($d = 2$) o cara ($d = 3$) opuesta al vértice a_{j_T} en el elemento T y η_j^T es el vector normal unitario interior a la arista o cara Γ_j multiplicado por la medida de la arista o cara, $\eta_j^T = \eta_{|\Gamma_j|} |\Gamma_j|$, $j = 1, \dots, d+1$.

Se comprueba fácilmente que se verifica

$$\sum_{i=1}^{d+1} \eta_i^T = 0 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (5.18)$$

entonces, utilizando esta propiedad, obtenemos la siguiente expresión para el flujo σ^T

$$\sigma^T = - \sum_{i=1}^{d+1} \int_{\Gamma_i} \phi_h \bar{\mathbf{v}} \cdot \eta_i^T dA_x = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d+1} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \eta_i^T) \phi_{i_T}.$$

Introducimos los coeficientes $K_{i_T}^T$ que definimos como sigue

$$K_{i_T}^T = \frac{1}{d} \bar{\mathbf{v}} \cdot \eta_i^T, \quad 1 \leq i \leq d+1. \quad (5.19)$$

Utilizando esta notación el flujo σ^T se escribe

$$\sigma^T = \sum_{i=1}^{d+1} K_{i_T}^T \phi_{i_T}. \quad (5.20)$$

Además, usando (5.18) se sigue

$$\sum_{i=1}^{d+1} K_{i_T}^T = 0 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (5.21)$$

A partir de los coeficientes $K_{i_T}^T$, establecemos la siguiente definición para nodos de entrada y de salida.

Definición 5.5.1. Dado $T \in \mathcal{T}_h$, decimos que el vértice a_{i_T} es un nodo de entrada para T o bien que el nodo a_{i_T} está corriente arriba si $K_{i_T}^T < 0$. En caso contrario decimos que a_{i_T} es un nodo de salida para T o bien que el nodo a_{i_T} está corriente abajo, $i = 1, \dots, d+1$.

Utilizando estas notaciones, podemos escribir el término convectivo discretizado de la siguiente forma matricial

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho (\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h) \bar{\Pi}_h(\psi_h) dx &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \bar{\rho}|_T \sum_{i=1}^{d+1} \psi_{i_T} \beta_{i_T}^T \sigma^T \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \bar{\rho}|_T \sum_{i=1}^{d+1} \psi_{i_T} \sum_{j=1}^{d+1} C_{ij}^T \phi_{j_T}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

siendo $C_{ij}^T = \beta_{i_T}^T K_{j_T}^T$, $1 \leq i, j \leq d+1$, la matriz elemental del método distributivo. Algunos métodos distributivos no admiten esta formulación, por este motivo escribimos el esquema de forma más general, concretamente consideramos que

$$\beta_{i_T}^T \sigma^T = \sum_{j=1}^{d+1} C_{ij}^T \phi_{j_T}, \quad i = 1, \dots, d+1, \quad (5.23)$$

siendo C^T una matriz elemental determinada por el método distributivo. Esta formulación permite contemplar la posibilidad de que los coeficientes β_{iT}^T sean funciones racionales de ϕ_{jT} que no estén definidos para $\sigma^T = 0$, $1 \leq i, j \leq d+1$.

Entonces podemos escribir la discretización del término convectivo de la siguiente forma general

$$\int_{\Omega} \rho (\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h) \bar{\Pi}_h(\psi_h) dx = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \mathcal{D}_{ij} \psi_i \phi_j, \quad (5.24)$$

donde

$$\mathcal{D}_{ij} = \sum_{T \in E_j \cap E_i} \bar{\rho}_{|T} \hat{C}_{ij}^T, \text{ siendo } \hat{C}_{lTkT}^T = C_{lk}^T, \quad 1 \leq l, k \leq d+1, \quad T \in \mathcal{T}_h.$$

Entonces, \mathcal{D} es la matriz global del método distributivo.

Observación 5.5.1. Según los coeficientes de distribución, podemos distinguir entre dos tipos de esquemas

- Esquemas lineales: en el caso de que \mathcal{D} no dependa de ϕ_h . Es decir, las matrices elementales C^T son independientes de ϕ_h . En particular, para esquemas que admiten la formulación dada en (5.22) los coeficientes β_i^T deben ser independientes de ϕ_h .
- Esquemas no lineales: en el caso de que \mathcal{D} dependa de ϕ_h .

5.6. Métodos distributivos en dimensión dos: el N-esquema y el esquema PSI

En esta sección introducimos dos de los métodos distributivos más importantes: el N-esquema (Narrow) y el esquema PSI (Positive Streamwise Invariance).

Dado un elemento $T \in \mathcal{T}_h$, pueden ocurrir dos situaciones: que el elemento tenga sólo un nodo corriente abajo o bien que tenga dos (ver Figura 5.1).

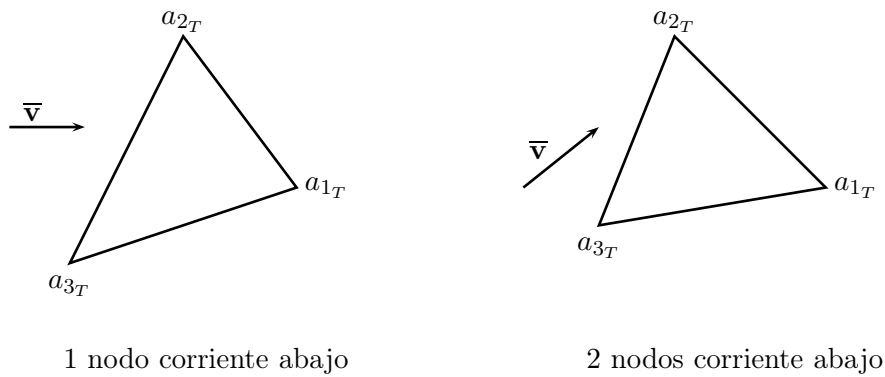


Figura 5.1: Nodos corriente arriba/abajo.

Según la teoría de los métodos distributivos, sólo los nodos que están corriente abajo reciben contribución del flujo total sobre T . Esto se traduce en que los coeficientes de distribución, β_{iT}^T , para estos nodos

serán no nulos.

Entonces, en el caso en que el elemento tenga sólo un nodo corriente abajo, los coeficientes de distribución están determinados. En efecto, por convenio para los nodos corriente arriba se tiene que $\beta_{i_T}^T = 0$, por ejemplo, si estamos en la primera situación de la Figura 5.1 se tiene que $\beta_{2_T}^T = \beta_{3_T}^T = 0$, y por último el coeficiente del nodo corriente abajo queda determinado por la condición (5.15), concretamente $\beta_{1_T}^T = 1$.

Entonces, vamos a considerar la segunda situación de la Figura 5.1, es decir el caso en que tengamos dos nodos corriente abajo. En este caso, tendremos que determinar los coeficientes de distribución para los dos nodos corriente abajo. Las distintas maneras de repartir el flujo total entre estos nodos es lo que diferencia a los distintos métodos distributivos.

5.6.1. El N-esquema

Introducimos el esquema para el caso ilustrado en la Figura 5.2, es decir, los nodos a_{i_T} y a_{j_T} están corriente abajo. En primer lugar, descomponemos la velocidad en suma de dos vectores, $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_i + \bar{\mathbf{v}}_j$, que resultan de proyectar la velocidad sobre las dos aristas del elemento que contienen al nodo que está corriente arriba (ver Figura 5.2), por comodidad omitimos la referencia al elemento.

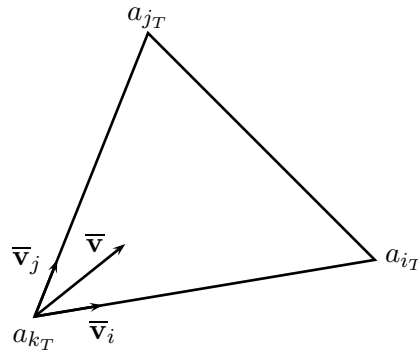


Figura 5.2: Descomposición de la velocidad.

A partir de la descomposición para la velocidad obtenemos la siguiente descomposición para el flujo total sobre el elemento T

$$\sigma^T = \sigma_{i_T}^T + \sigma_{j_T}^T, \quad \text{con } \sigma_{l_T}^T = \sigma^T(\bar{\mathbf{v}}_l) = \int_T \bar{\mathbf{v}}_l \cdot \text{grad } \phi_h \, dx \quad l = i, j.$$

Entonces, el nodo a_{i_T} (respectivamente, a_{j_T}) se encuentra corriente abajo respecto de la velocidad \mathbf{v}_i (respectivamente, \mathbf{v}_j), por lo que se le asocia la totalidad del flujo correspondiente al vector $\bar{\mathbf{v}}_i$ (respectivamente, $\bar{\mathbf{v}}_j$). De esta manera tenemos determinados los coeficientes de distribución, concretamente

$$\beta_{k_T}^T = 0, \quad \beta_{i_T}^T = \frac{\int_T \bar{\mathbf{v}}_i \cdot \text{grad } \phi_h \, dx}{\sigma^T}, \quad \beta_{j_T}^T = \frac{\int_T \bar{\mathbf{v}}_j \cdot \text{grad } \phi_h \, dx}{\sigma^T}. \quad (5.25)$$

Obtengamos una expresión alternativa para $\sigma_{l_T}^T$, sin necesidad de tener calcular $\bar{\mathbf{v}}_l$, $l = i, j$. En primer

lugar, aplicando la igualdad (5.17) para el flujo correspondiente a la componente $\bar{\mathbf{v}}_l$, $l = i, j$, obtenemos

$$-\sigma_{l_T}^T = \frac{\phi_{i_T} + \phi_{j_T}}{2} \bar{\mathbf{v}}_l \cdot \boldsymbol{\eta}_k^T + \frac{\phi_{i_T} + \phi_{k_T}}{2} \bar{\mathbf{v}}_l \cdot \boldsymbol{\eta}_j^T + \frac{\phi_{j_T} + \phi_{k_T}}{2} \bar{\mathbf{v}}_l \cdot \boldsymbol{\eta}_i^T.$$

Teniendo en cuenta (5.18) y que $\bar{\mathbf{v}}_i \cdot \boldsymbol{\eta}_j^T = \bar{\mathbf{v}}_j \cdot \boldsymbol{\eta}_i^T = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} -\sigma_{i_T}^T &= \frac{\phi_{j_T} + \phi_{k_T}}{2} \bar{\mathbf{v}}_i \cdot \boldsymbol{\eta}_i^T - \frac{\phi_{i_T} + \phi_{j_T}}{2} \bar{\mathbf{v}}_i \cdot \boldsymbol{\eta}_i^T, \\ -\sigma_{j_T}^T &= \frac{\phi_{i_T} + \phi_{k_T}}{2} \bar{\mathbf{v}}_j \cdot \boldsymbol{\eta}_j^T - \frac{\phi_{i_T} + \phi_{j_T}}{2} \bar{\mathbf{v}}_j \cdot \boldsymbol{\eta}_j^T. \end{aligned}$$

y además como $\bar{\mathbf{v}}_l \cdot \boldsymbol{\eta}_l^T = \bar{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\eta}_l^T$, $l = i, j$ se tiene

$$-\sigma_{l_T}^T = \frac{1}{2}(\phi_{k_T} - \phi_{l_T}) \bar{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\eta}_l^T = K_{l_T}^T(\phi_{k_T} - \phi_{l_T}) \quad l = i, j.$$

Nótese que a partir de estas igualdades también obtenemos una expresión alternativa para el flujo σ^T , en efecto

$$\sigma^T = \sigma_{i_T}^T + \sigma_{j_T}^T = K_{i_T}^T(\phi_{i_T} - \phi_{k_T}) + K_{j_T}^T(\phi_{j_T} - \phi_{k_T}).$$

Entonces los coeficientes de distribución para el N-esquema se pueden definir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \beta_{k_T}^T &= 0, \\ \beta_{i_T}^T &= \frac{\sigma^T(\bar{\mathbf{v}}_i)}{\sigma^T(\bar{\mathbf{v}})} = \frac{K_{i_T}^T(\phi_{i_T} - \phi_{k_T})}{K_{i_T}^T(\phi_{i_T} - \phi_{k_T}) + K_{j_T}^T(\phi_{j_T} - \phi_{k_T})}, \\ \beta_{j_T}^T &= \frac{\sigma^T(\bar{\mathbf{v}}_j)}{\sigma^T(\bar{\mathbf{v}})} = \frac{K_{j_T}^T(\phi_{j_T} - \phi_{k_T})}{K_{i_T}^T(\phi_{i_T} - \phi_{k_T}) + K_{j_T}^T(\phi_{j_T} - \phi_{k_T})}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Este esquema admite la formulación dada en (5.23) dando lugar a un esquema lineal. En [58] se demuestran resultados de positividad local y global del esquema bajo condiciones CFL.

El teorema de Godunov establece que ningún esquema lineal y positivo puede ser de orden mayor o igual que dos. Entonces utilizando este resultado se deduce que el N-esquema no puede ser de orden mayor o igual que dos, concretamente en [58] se prueba que es de orden 1.

5.6.2. El esquema PSI

El esquema PSI (Positive Streamwise Invariance) es un esquema no lineal diseñado para ser positivo y de alto orden.

Como para el esquema anterior consideramos la situación en la que hay dos nodos corriente abajo, a_{i_T} y a_{j_T} (ver Figura 5.3).

El objetivo de este método es asegurar que las líneas de nivel de ϕ_h sean paralelas a la velocidad $\bar{\mathbf{v}}$. De este modo se resuelve exactamente la ecuación $\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h = 0$.

Para introducir el esquema diferenciamos entre dos posibles situaciones: o bien las líneas de nivel de ϕ_h cortan a la arista de salida $(\overline{a_{j_T} a_{i_T}})$ (ver Figura 5.3) o bien no la cortan (ver Figura 5.4).

Caso I. Las líneas de nivel cortan a la arista de salida.

En este apartado introducimos el esquema para el caso ilustrado en la Figura 5.3. En esta situación se verifica

$$\Lambda := (\phi_{i_T} - \phi_{k_T})(\phi_{j_T} - \phi_{k_T}) < 0, \quad (5.27)$$

o lo que es equivalente

$$\phi_{a_T} := \min(\phi_{i_T}, \phi_{j_T}) < \phi_{k_T} < \phi_{b_T} := \max(\phi_{i_T}, \phi_{j_T}).$$

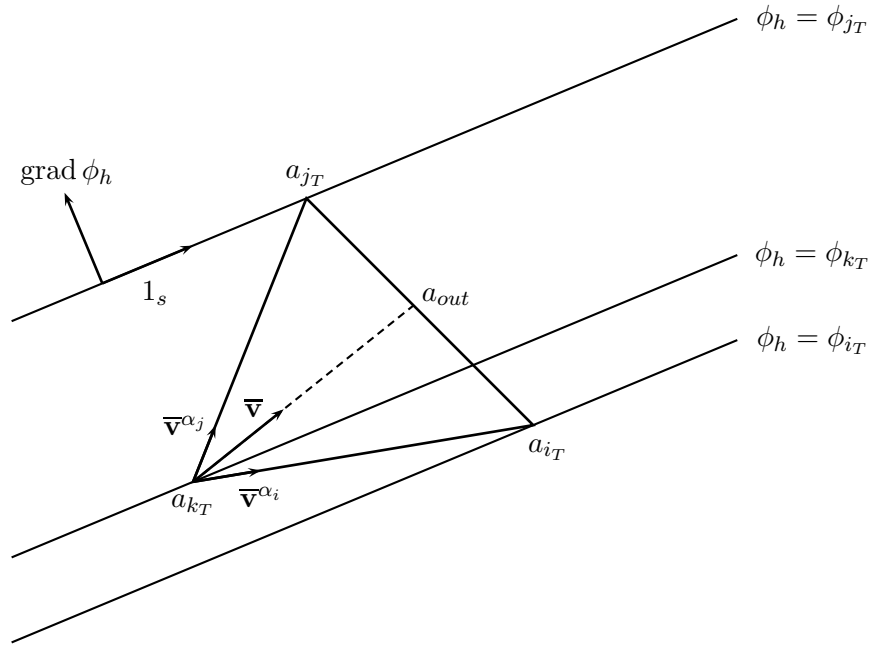


Figura 5.3: Las líneas de nivel cortan a la arista de salida.

Para justificar la construcción del esquema consideramos la ecuación de transporte estacionaria

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad } \phi = 0. \quad (5.28)$$

Para su resolución numérica utilizamos un proceso evolutivo, concretamente, para la derivada temporal empleamos el método de Euler explícito combinado con la técnica de “mass-lumping” y para el término convectivo planteamos un esquema distributivo que admite la formulación dada en (5.22). Entonces, obtenemos el siguiente esquema totalmente discretizado

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\Delta t}{S_i} \sum_{T \in E_i} \sum_{j=1}^{d+1} \hat{C}_{ij}^{T,n} \phi_{j_T}^n, \quad i \in I \quad (5.29)$$

donde Δt es el paso de tiempo de la discretización, ϕ_i^n es una aproximación de $\phi(a_i)$ en el instante $t_n = n\Delta t$,

$$S_i = \sum_{T \in E_i} \frac{|T|}{d+1}, \quad \text{y } \hat{C}_{ij}^{T,n} = \beta_i^{T,n} K_j^T.$$

Introducimos la función $\phi_h^n \in V_h$ tal que $\phi_h^n(a_i) = \phi_i^n$, $i \in I$.

Denotamos por ϕ_{out}^n al valor que toma ϕ_h^n en el punto de intersección de la recta paralela a $\bar{\mathbf{v}}$ que pasa por a_{k_T} y de la arista $\overline{a_{i_T}a_{j_T}}$, es decir, si denotamos a este punto por a_{out} (ver Figura 5.3) $\phi_{out}^n = \phi_h^n(a_{out})$. El objetivo del método es distribuir el flujo entre los nodos a_{i_T} y a_{j_T} de manera que se consiga aproximar ϕ_{out}^{n+1} a $\phi_{k_T}^{n+1}$ y así lograr que $(\text{grad } \phi_h^n)|_T \perp \bar{\mathbf{v}}$ (aproximadamente).

Antes de introducir el método recordamos que se verifica

$$\sum_{j=1}^{d+1} \hat{C}_{ij_T}^{T,n} \phi_{j_T}^n = \beta_i^{T,n} \sigma^{T,n}, \quad i \in I,$$

siendo $\sigma^{T,n} = \int_T \bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h^n dx$. Entonces, si $\phi_{out}^n > \phi_{k_T}^n$, lo que corresponde a $(\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h^n)|_T > 0$, y por tanto a $\sigma^{T,n} > 0$, enviamos todo el flujo al vértice donde se alcanza el máximo. En caso de que $\sigma^{T,n} < 0$ enviamos todo el flujo al vértice donde se alcanza el mínimo. De esta manera, se consigue que ϕ_{out}^{n+1} esté más próximo a $\phi_{k_T}^{n+1}$ de lo que ϕ_{out}^n está de $\phi_{k_T}^n$.

Proponemos el siguiente criterio:

- **Caso I.1:** Si $(\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h)|_T > 0$ (es el caso de la Figura 5.3).

- Si $\min(\phi_{i_T}, \phi_{j_T}) = \phi_{i_T}$, consideramos

$$\beta_{i_T}^T = \beta_{k_T}^T = 0, \quad \beta_{j_T}^T = 1.$$

- Si $\min(\phi_{i_T}, \phi_{j_T}) = \phi_{j_T}$, consideramos

$$\beta_{j_T}^T = \beta_{k_T}^T = 0, \quad \beta_{i_T}^T = 1.$$

- **Caso I.2:** Si $(\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h)|_T < 0$.

- Si $\min(\phi_{i_T}, \phi_{j_T}) = \phi_{j_T}$, consideramos

$$\beta_{i_T}^T = \beta_{k_T}^T = 0, \quad \beta_{j_T}^T = 1.$$

- Si $\min(\phi_{i_T}, \phi_{j_T}) = \phi_{i_T}$, consideramos

$$\beta_{i_T}^T = \beta_{k_T}^T = 0, \quad \beta_{j_T}^T = 1.$$

Si $(\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h)|_T = 0$, cualquiera de las dos elecciones es aceptable.

Recordamos el siguiente resultado (ver [58]).

Teorema 5.6.1. *Si los coeficientes locales $C_{pq}^{T,n}$ que determinan el método distributivo general (5.29) verifican*

$$C_{pp}^{T,n} \geq 0, \quad C_{pq}^{T,n} \leq 0 \quad \forall p \neq q, \quad 1 \leq p, q \leq d+1, \quad (5.30)$$

entonces el esquema verifica el principio del máximo para un paso de tiempo Δt suficientemente pequeño.

Es inmediato comprobar que la matriz elemental del método así definido no verifica (5.30), y por lo tanto no tenemos garantizado que se verifique el principio del máximo para el esquema (5.29). Para solventar esta dificultad, vamos a reemplazar la velocidad $\bar{\mathbf{v}}$ por otra velocidad que conserve el flujo a través de T y para la cual la matriz elemental del método distributivo, $C_{ij}^T = \beta_{i_T}^T K_{j_T}^T$, verifique la

condición (5.30). Para construir esta velocidad vamos a distinguir entre el caso *I.1* y *I.2*. En primer lugar, introducimos un vector 1_s que es unitario y ortogonal a $\text{grad } \phi_h$.

Caso I.1: Si $(\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h)|_T > 0$, se tiene que el coeficiente $C_{a,l_2}^T \geq 0$, siendo a el índice local del vértice del elemento T para el cual se alcanza el máximo y $l_2 \neq a, k$. Entonces, buscamos una velocidad $\bar{\mathbf{v}}^{\alpha_a}$ tal que $(\bar{\mathbf{v}}^{\alpha_a} \cdot \text{grad } \phi_h)|_T = (\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h)|_T$ (por tanto el flujo asociado a $\bar{\mathbf{v}}^{\alpha_a}$ es igual al flujo asociado a $\bar{\mathbf{v}}$) y además para la cual la matriz elemental verifique (5.30).

Denotamos por r_p el vector de posición del vértice a_{pT} , $p = 1, \dots, 3$, y definimos el vector $r_{qp} = r_p - r_q$, $p, q = 1, \dots, 3$ que nos da la dirección de las aristas. Buscamos $\bar{\mathbf{v}}^{\alpha_a} = \bar{\mathbf{v}} + \alpha_a 1_s$ y tal que $\bar{\mathbf{v}}^{\alpha_a} \parallel r_{ka}$, de esta manera tenemos garantizadas las dos condiciones que se deben verificar. Puede comprobarse que tomando

$$\bar{\mathbf{v}}^{\alpha_a} = \frac{\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h}{\phi_{aT} - \phi_{kT}} r_{ka},$$

se tiene que

$$\sigma^T(\bar{\mathbf{v}}^{\alpha_a}) = \sigma^T(\bar{\mathbf{v}}).$$

Entonces, reemplazamos $\bar{\mathbf{v}}$ por $\bar{\mathbf{v}}^{\alpha_a}$ para calcular el flujo total sobre el elemento T , de esta manera obtenemos una matriz elemental que verifica (5.30).

Caso I.2: Análogamente, si $(\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h)|_T < 0$, para calcular el flujo a través de T reemplazamos la velocidad $\bar{\mathbf{v}}$ por la velocidad $\bar{\mathbf{v}}^{\alpha_b}$, siendo

$$\bar{\mathbf{v}}^{\alpha_b} = \frac{\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h}{\phi_{bT} - \phi_{kT}} r_{kb},$$

donde b es el índice local del vértice del elemento T para el cual se alcanza en mínimo. De esta manera, obtenemos una matriz elemental que verifica (5.30).

Caso II. Las líneas de nivel no cortan a la arista de salida.

En este apartado introducimos el esquema para el caso ilustrado en la Figura 5.4. En esta situación se verifica

$$\Lambda = (\phi_{iT} - \phi_{kT})(\phi_{jT} - \phi_{kT}) > 0, \quad (5.31)$$

o lo que es equivalente

$$\phi_{kT} < \min(\phi_{iT}, \phi_{jT}) = \phi_{aT} \quad \text{ó} \quad \phi_{kT} > \max(\phi_{iT}, \phi_{jT}) = \phi_{bT}.$$

En este caso, consideramos los coeficientes de distribución del N-esquema, es decir

$$\beta_{iT}^T = \frac{\sigma_{iT}^T}{\sigma^T} = \frac{K_{iT}^T(\phi_{iT} - \phi_{kT})}{K_{iT}^T(\phi_{iT} - \phi_{kT}) + K_{jT}^T(\phi_{jT} - \phi_{kT})},$$

$$\beta_{jT}^T = \frac{\sigma_{jT}^T}{\sigma^T} = \frac{K_{jT}^T(\phi_{jT} - \phi_{kT})}{K_{iT}^T(\phi_{iT} - \phi_{kT}) + K_{jT}^T(\phi_{jT} - \phi_{kT})}.$$

Nótese que en este caso, $\sigma^T \neq 0$. En efecto, de ser $(\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h)|_T = 0$, entonces la línea de nivel $\phi_h = \phi_{kT}$ es paralela a $\bar{\mathbf{v}}$ y por tanto, corta a la arista de salida. Y justamente en este caso estamos suponiendo que no ocurre así. Por tanto, los coeficientes de distribución β_{iT}^T , $l = i, j$, están bien definidos. Entonces, como en el caso anterior, la matriz elemental del método distributivo admite la formulación dada en (5.22). De forma análoga al caso anterior se puede comprobar que los coeficientes de la matriz C^T no satisfacen (5.30), por este motivo para calcular el flujo reemplazamos la velocidad $\bar{\mathbf{v}}$ por $\bar{\mathbf{v}}^{\alpha_l}$, $l = i, j$, obteniendo así una

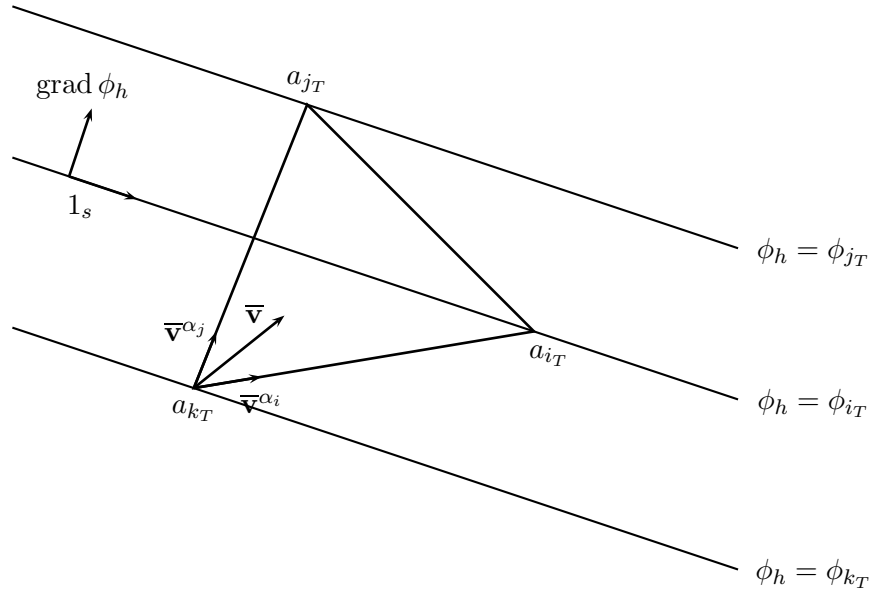


Figura 5.4: Las líneas de nivel no cortan a la arista de salida.

nueva formulación matricial con matrices elementales que satisfacen la condición (5.30). Concretamente, si escribimos

$$\beta_{l_T}^T \sigma^T(\bar{\mathbf{v}}) = \beta_{l_T}^T \sigma^T(\bar{\mathbf{v}}^{\alpha_l}), \quad l = i, j,$$

resulta la siguiente matriz elemental

$$C_{pq}^T = \beta_{p_T}^T K_{q_T}^T(\bar{\mathbf{v}}^{\alpha_p}), \quad 1 \leq p, q \leq 3,$$

donde $K_{q_T}^T(\bar{\mathbf{v}}^{\alpha_p}) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{v}}^{\alpha_p} \cdot \eta_q^T$. Es inmediato comprobar que esta matriz verifica la condición (5.30).

Se puede comprobar que la matriz D definida por el método PSI es continua como función de ϕ_h (ver [58]). Además, en [58] se demuestra que el esquema es localmente positivo y de segundo orden para el estado estacionario.

Capítulo 6

Discretización total de las ecuaciones de convección-difusión utilizando el método PSI. Resultados Numéricos.

6.1. Introducción

En este capítulo, en primer lugar, proponemos una discretización temporal de (5.7). Concretamente utilizamos un método de Crank-Nicholson. Generalmente tanto el N-esquema como el PSI se utilizan para resolver ecuaciones de convección estacionarias, en este trabajo proponemos el método PSI para resolver una ecuación de convección-difusión evolutiva con coeficientes no constantes dependientes de la variable espacial. En [25] se resuelve una ecuación convección-difusión estacionaria, se obtiene convergencia fuerte de primer orden en norma H^1 , y se prueba que el método es bien equilibrado al segundo orden para flujos de convección dominante.

En segundo lugar, se presentan los resultados numéricos obtenidos para ejemplos test en dominios bidimensionales. Verificamos los resultados que predice la teoría, como son: órdenes de convergencia, que el método es bien equilibrado al segundo orden para flujos de convección dominante y que es particularmente preciso en zonas de grandes gradientes.

6.2. Discretización temporal

En esta sección obtenemos una discretización temporal de (5.7). Para ello se utiliza un método de Crank-Nicholson. Antes de establecer la discretización temporal vamos a introducir la discretización del término convectivo. Escribiremos el problema semidiscretizado como un problema no lineal de tipo Petrov-Galerkin.

En primer lugar, introducimos la discretización del término convectivo de la ecuación (5.7) mediante el método PSI. Concretamente, teniendo en cuenta que el método admite la formulación dada en (5.22) con los coeficientes de distribución dependientes de la variable ϕ_h , obtenemos la siguiente discretización

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{v} \cdot \text{grad } \phi_h) \psi_h \, dx \simeq \int_{\Omega} \bar{\rho}(\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \phi_h) \bar{\Pi}_{\phi_h}(\psi_h) \, dx,$$

siendo $\bar{\Pi}_{\phi_h}$ el operador de interpolación definido en (5.13). Nótese que para el esquema PSI las funciones $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ y por tanto el operador de interpolación $\bar{\Pi}_h$ dependen de la variable ϕ_h puesto que se trata de un esquema no lineal con coeficientes de distribución dependientes de dicha variable. Por este motivo escribimos $\bar{\Pi}_{\phi_h}$ y $\{\lambda_i(\phi_h)\}_{i \in I}$.

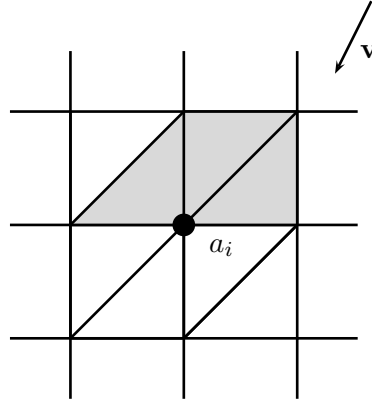


Figura 6.1: Soporte de la función de base $\lambda_i(\phi_h)$.

Entonces, introduciendo esta discretización para el término convectivo en el problema (5.7)-(5.8), obtenemos el siguiente problema débil semidiscretizado en espacio

Problema débil semidiscretizado I: Encontrar una función $\phi_h(\cdot, t) \in V_h$ tal que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x) \phi_h(x, t) \psi_h(x) dx + \int_{\Omega} \bar{\rho}(x) (\bar{\mathbf{v}}(x, t) \cdot \text{grad } \phi_h(x, t)) (\bar{\Pi}_{\phi_h}(\psi_h))(x) dx \\ & + \int_{\Omega} A(x) \text{grad } \phi_h(x, t) \cdot \text{grad } \psi_h(x) dx \\ & = \int_{\Omega} f(x, t) \psi_h(x) dx, \quad \forall \psi_h \in V_h \text{ en } \mathcal{D}'(0, T); \end{aligned} \quad (6.1)$$

sujeta a la condición inicial

$$\phi_h(\cdot, 0) = \Pi_h(\phi^0). \quad (6.2)$$

Un método alternativo que resulta más preciso para flujos de convección dominante se obtiene cuando también descentramos el segundo miembro. Concretamente, proponemos el siguiente problema débil semidiscretizado en espacio

Problema débil semidiscretizado II: Encontrar una función $\phi_h(\cdot, t) \in V_h$ tal que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x) \phi_h(x, t) \psi_h(x) dx + \int_{\Omega} \bar{\rho}(x) (\bar{\mathbf{v}}(x, t) \cdot \text{grad } \phi_h(x, t)) (\bar{\Pi}_{\phi_h}(\psi_h))(x) dx \\ & + \int_{\Omega} A(x) \text{grad } \phi_h(x, t) \cdot \text{grad } \psi_h(x) dx \\ & = \int_{\Omega} f(x, t) (\bar{\Pi}_{\phi_h}(\psi_h))(x) dx, \quad \forall \psi_h \in V_h \text{ en } \mathcal{D}'(0, T); \end{aligned} \quad (6.3)$$

sujeta a la condición inicial

$$\phi_h(\cdot, 0) = \Pi_h(\phi^0). \quad (6.4)$$

Vamos a obtener una discretización temporal de las ecuaciones (6.1) y (6.3). Para ello procedemos de forma análoga a como hicimos en la Sección 1.4 para obtener una semidiscretización temporal de (1.56).

Adoptamos la notación introducida en dicha sección. Entonces, aproximamos la derivada temporal por una diferencia de dos puntos centrada en $t_{n+\frac{1}{2}}$ y para el resto de términos se utiliza el θ – método. En concreto, utilizamos la siguiente discretización centrada de segundo orden para aproximar la derivada temporal en un instante $t = t_{n+\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial \phi_h}{\partial t}(x, t_{n+\frac{1}{2}}) \simeq \frac{\phi_{h,\Delta t}^{n+1}(x) - \phi_{h,\Delta t}^n(x)}{\Delta t}, \quad (6.5)$$

donde $\phi_{h,\Delta t}^m$ denota una aproximación de ϕ_h en el instante t_m . En la ecuación (6.5) se comete un error $O(\Delta t^2)$.

Para obtener una discretización temporal de (6.1) y (6.3) evaluamos las ecuaciones en $t = t_{n+\frac{1}{2}}$, aproximamos la derivada temporal por la fórmula centrada (6.5) y para el resto de términos utilizamos una combinación lineal convexa en la que intervienen los tiempos $t = t_n$ y $t = t_{n+1}$. Entonces, obtenemos, respectivamente, los siguientes problemas discretos de (6.1)-(6.2) y (6.3)-(6.4)

(PD.I) Problema débil discretizado en tiempo y espacio I: Dado $\phi_{h,\Delta t}^0 := \Pi_h(\phi^0) \in V_h$, encontrar $\widehat{\phi_{h,\Delta t}} = \{\phi_{h,\Delta t}^n\}_{n=1}^N \in [V_h]^N$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho(x) \frac{\phi_{h,\Delta t}^{n+1}(x) - \phi_{h,\Delta t}^n(x)}{\Delta t} \psi_h(x) dx \\ & + \theta \int_{\Omega} \bar{\rho}(x) \left(\bar{\mathbf{v}}^{n+1}(x) \cdot \text{grad } \phi_{h,\Delta t}^{n+1}(x) \right) \left(\bar{\Pi}_{\phi_{h,\Delta t}^{n+1}}(\psi_h) \right)(x) dx \\ & + (1 - \theta) \int_{\Omega} \bar{\rho}(x) \left(\bar{\mathbf{v}}^n(x) \cdot \text{grad } \phi_{h,\Delta t}^n(x) \right) \left(\bar{\Pi}_{\phi_{h,\Delta t}^n}(\psi_h) \right)(x) dx \\ & + \theta \int_{\Omega} A(x) \text{grad } \phi_{h,\Delta t}^{n+1}(x) \cdot \text{grad } \psi_h(x) dx \\ & + (1 - \theta) \int_{\Omega} A(x) \text{grad } \phi_{h,\Delta t}^n(x) \cdot \text{grad } \psi_h(x) dx \\ & = \int_{\Omega} (\theta f^{n+1}(x) + (1 - \theta)f^n(x)) \psi_h(x) dx, \end{aligned} \quad (6.6)$$

para todo $\psi_h \in V_h$ y $n = 0, \dots, N - 1$.

(PD.II) Problema débil discretizado en tiempo y espacio II: Dado $\phi_{h,\Delta t}^0 := \Pi_h(\phi^0) \in V_h$, encontrar $\widehat{\phi_{h,\Delta t}} = \{\phi_{h,\Delta t}^n\}_{n=1}^N \in [V_h]^N$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho(x) \frac{\phi_{h,\Delta t}^{n+1}(x) - \phi_{h,\Delta t}^n(x)}{\Delta t} \psi_h(x) dx \\ & + \theta \int_{\Omega} \bar{\rho}(x) \left(\bar{\mathbf{v}}^{n+1}(x) \cdot \text{grad } \phi_{h,\Delta t}^{n+1}(x) \right) \left(\bar{\Pi}_{\phi_{h,\Delta t}^{n+1}}(\psi_h) \right)(x) dx \\ & + (1 - \theta) \int_{\Omega} \bar{\rho}(x) \left(\bar{\mathbf{v}}^n(x) \cdot \text{grad } \phi_{h,\Delta t}^n(x) \right) \left(\bar{\Pi}_{\phi_{h,\Delta t}^n}(\psi_h) \right)(x) dx \\ & + \theta \int_{\Omega} A(x) \text{grad } \phi_{h,\Delta t}^{n+1}(x) \cdot \text{grad } \psi_h(x) dx \\ & + (1 - \theta) \int_{\Omega} A(x) \text{grad } \phi_{h,\Delta t}^n(x) \cdot \text{grad } \psi_h(x) dx \\ & = \int_{\Omega} \left(\theta f^{n+1}(x) \left(\bar{\Pi}_{\phi_{h,\Delta t}^{n+1}}(\psi_h) \right)(x) + (1 - \theta)f^n(x) \left(\bar{\Pi}_{\phi_{h,\Delta t}^n}(\psi_h) \right)(x) \right) dx, \end{aligned} \quad (6.7)$$

para todo $\psi_h \in V_h$ y $n = 0, \dots, N - 1$.

En las ecuaciones (6.6) y (6.7) $\theta \in [0, 1]$. En la práctica, para eliminar la no linealidad del término de convección aproximamos

$$\bar{\Pi}_{\phi_{h,\Delta t}^{n+1}}(\psi_h) \simeq \bar{\Pi}_{\phi_{h,\Delta t}^n}(\psi_h).$$

Los problemas discretos **(PD.I)** y **(PD.II)** pueden ser escritos en forma matricial como sigue

$$\textbf{(PD.I)} \quad \mathcal{B}^{n+1} \phi_{\Delta t}^{n+1} = b^{n+1}, \quad (6.8)$$

$$\textbf{(PD.II)} \quad \mathcal{B}^{n+1} \phi_{\Delta t}^{n+1} = \tilde{b}^{n+1}, \quad (6.9)$$

donde $\{(\phi_{\Delta t}^{n+1})_i\}_{i \in I}$ es el vector que contiene las coordenadas de $\phi_{h,\Delta t}^{n+1}$ respecto a la base natural de V_h , b^{n+1} y \tilde{b}^{n+1} son dos vectores de dimensión $\sharp I$ y \mathcal{B}^{n+1} es una matriz de dimensión $\sharp I \times \sharp I$. Recordemos que I es el conjunto de índices correspondientes a los vértices interiores de la malla. La matriz \mathcal{B}^{n+1} y los vectores b^{n+1} y \tilde{b}^{n+1} se pueden descomponer como

$$\begin{cases} \mathcal{B}^{n+1} = \mathcal{M} + \mathcal{D}^{n+1} + \mathcal{Q}, \\ b^{n+1} = m^{n+1} + d^{n+1} + q^{n+1} + s^{n+1}, \\ \tilde{b}^{n+1} = m^{n+1} + d^{n+1} + q^{n+1} + \tilde{s}^{n+1}, \end{cases}$$

donde las matrices \mathcal{M} y \mathcal{Q} se conocen respectivamente como la matriz de masa global y la matriz de rigidez global, y la matriz \mathcal{D}^{n+1} es la matriz global del método distributivo. En efecto, utilizando la notación introducida en las Secciones 5.4 y 5.5, se tiene

$$(\mathcal{M})_{ij} = \sum_{T \in E_i \cap E_j} \int_T \rho \varphi_i \varphi_j \, dx, \quad (6.10)$$

$$(\mathcal{D}^{n+1})_{ij} = \theta \Delta t \sum_{T \in E_i \cap E_j} \bar{\rho}|_T \beta_i^T(\phi_{h,\Delta t}^n) K_j^{T,n+1}, \quad (6.11)$$

$$(\mathcal{Q})_{ij} = \theta \Delta t \sum_{T \in E_i \cap E_j} \int_T A \operatorname{grad} \varphi_i \cdot \operatorname{grad} \varphi_j \, dx, \quad (6.12)$$

$$(m^{n+1})_i = \sum_{T \in E_i} \int_T \rho \phi_{h,\Delta t}^n \varphi_i \, dx, \quad (6.13)$$

$$(d^{n+1})_i = -(1 - \theta) \Delta t \sum_{T \in E_i} \int_T \bar{\rho} (\nabla^n \cdot \operatorname{grad} \phi_{h,\Delta t}^n) \lambda_i(\phi_{h,\Delta t}^n) \, dx, \quad (6.14)$$

$$(q^{n+1})_i = -(1 - \theta) \Delta t \sum_{T \in E_i} \int_T A \operatorname{grad} \phi_{h,\Delta t}^n \cdot \operatorname{grad} \varphi_i \, dx, \quad (6.15)$$

$$(s^{n+1})_i = \Delta t \sum_{T \in E_i} \int_T (\theta f^{n+1} + (1 - \theta) f^n) \varphi_i \, dx, \quad (6.16)$$

$$(\tilde{s}^{n+1})_i = \Delta t \sum_{T \in E_i} \int_T (\theta f^{n+1} + (1 - \theta) f^n) \lambda_i(\phi_{h,\Delta t}^n) \, dx, \quad (6.17)$$

para $i, j \in I$ y $0 \leq n \leq N - 1$.

En [23] se prueban resultados de convergencia y estimaciones de error para elementos finitos lineales aplicados a una ecuación elíptica de segundo orden y con segundo miembro $f \in L^r$ para $r > 1$. Este resultado se puede extender a la ecuación de convección-difusión estacionaria cuando se combinan elementos finitos lineales con el método PSI para la discretización del término convectivo. Antes de presentar este resultado, introducimos ciertas hipótesis sobre los datos.

Hipótesis 6.1. *La matriz de difusión, A , pertenecen a $\mathbb{W}^{1,\infty}(\Omega)$. Además la matriz A es simétrica y uniformemente coerciva, es decir se verifica*

$$\langle A(x)\xi, \xi \rangle \geq \alpha |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathcal{V}, \text{ c.p.d } x \in \Omega, \quad (6.18)$$

para algún $\alpha > 0$.

Hipótesis 6.2. La matriz \mathcal{Q} definida en (6.12) es diagonalmente dominante, es decir verifica

$$Q_{ii} - \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} |Q_{ij}| \geq 0, \quad \forall i \in I. \quad (6.19)$$

Hipótesis 6.3. Para cada $t \in [0, T]$ la velocidad $\mathbf{v}(\cdot, t)$ pertenece al espacio $L^\infty(\Omega)$.

Dado $1 < r < +\infty$, denotamos por $L^{r,\infty}(\Omega)$ el espacio de Marcinkiewicz cuya norma se define como

$$\|v\|_{L^{r,\infty}(\Omega)} = \sup_{\lambda > 0} \left(\lambda |\{x \in \Omega : |v(x)| \geq \lambda\}|^{1/r} \right). \quad (6.20)$$

El espacio $L^{r,\infty}(\Omega)$ es un subespacio propio de $L^\infty(\Omega)$.

Hipótesis 6.4. La función f pertenece al espacio $L^{r,\infty}(\Omega)$ para algún $1 < r < 2$.

Denotamos por $W_0^{1,p}(\Omega)$ la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$, siendo $C_c^\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones infinitamente diferenciables y de soporte compacto contenido en Ω . Dotamos al espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ con la norma

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\text{grad } u\|_{p,\Omega}.$$

Nótese que sobre el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ esta norma es equivalente a la norma usual

$$\|u\|_{1,p,\Omega} = \left(\|u\|_{p,\Omega}^p + \|\text{grad } u\|_{p,\Omega}^p \right)^{1/p}.$$

Dado $T \in \mathcal{T}_h$ denotamos por h_T el diámetro de T y por ρ_T el diámetro de la bola inscrita en T . Asumimos que la familia de triangulaciones $(\mathcal{T}_h)_h$ es regular en el sentido de Ciarlet [30]. Es decir, existe una constante σ tal que

$$\forall h, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma. \quad (6.21)$$

Consideramos el siguiente problema estacionario de convección-difusión

$$\begin{cases} \mathbf{v} \cdot \text{grad } \phi - \text{div}(A \text{grad } \phi) = f & \text{en } \Omega, \\ \phi = 0 & \text{en } \Gamma. \end{cases} \quad (6.22)$$

Para resolver numéricamente este problema utilizamos los procesos evolutivos descritos anteriormente. Calculamos la sucesión $\phi_{h,\Delta t}^{n+1}$, $n \geq 0$, que es la solución del problema (6.6) (respectivamente, (6.7)), hasta obtener convergencia. Denotamos por ϕ_h la solución estacionaria obtenida utilizando este método. Nótese que estamos cometiendo un abuso de notación, puesto que en general las soluciones de los problemas (6.6) y (6.7) son distintas.

En general, para $f \in L^1(\Omega)$, la solución del problema (6.22) no pertenece a $H_0^1(\Omega)$, por este motivo se introduce el concepto de solución renormalizada. Las definiciones de estas soluciones fueron introducidas por Lions y Murat [51] (ver también, [34], [56], [57]). Considerando este nuevo concepto de solución se puede probar que el problema (6.22) está bien planteado, es decir, que la solución existe, es única y depende continuamente de los datos.

En [24] se prueba la convergencia en norma $W_0^{1,q}(\Omega)$ de las aproximaciones $\{\phi_h\}_h$ a la única solución renormalizada del problema (6.22). Además, se tiene el siguiente resultado de estimación de error.

Teorema 6.2.1. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 y además la familia de mallas $(\mathcal{T}_h)_h$ satisface (6.21). Entonces, para todo $1 \leq q < \frac{d}{d-1}$, se verifica la siguiente estimación de error para las soluciones estacionarias de los problemas discretos (PD.I) y (PD.II)*

$$\|\phi_h - \phi\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq C(d, q, r, \Omega, \alpha, \|A\|_{1,\infty,\Omega}, \|\mathbf{v}\|_{0,\infty,\Omega}, \sigma) h^{2(1-\frac{1}{r})} \|f\|_{L^{r,\infty}(\Omega)}, \quad (6.23)$$

siendo ϕ la única solución renormalizada del problema (6.22).

En el caso en que la matriz A sea la matriz identidad, es decir, cuando el operador de difusión es el operador de Laplace, la condición (6.19) se satisface si los ángulos interiores de todos los elementos de la triangulación son agudos (ver [31]). Enunciamos el resultado.

Proposición 6.2.1. *La condición (6.19) se verifica para el operador de Laplace si todos los ángulos interiores de cada elemento de \mathcal{T}_h son agudos, es decir si se satisface*

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in I \cup B \quad \text{con } j \neq i, \quad \langle \mathbf{n}_i^T, \mathbf{n}_j^T \rangle \leq 0,$$

siendo \mathbf{n}_i^T el vector normal unitario exterior a la arista o cara opuesta al vértice a_i en el elemento T , $i \in I \cup B$.

6.3. Resultados numéricos

Para analizar numéricamente el orden de convergencia del método y comprobar la fiabilidad de las herramientas informáticas desarrolladas utilizamos ejemplos test académicos. Mostramos los resultados numéricos para ejemplos test en dominios bidimensionales.

En general, las integrales presentes en las expresiones (6.10)-(6.17) no se pueden calcular exactamente. Como consecuencia, en la práctica, se aproximan usando un proceso de integración numérica. Utilizamos un cambio de variable en la integración, de manera que todas las integrales se reducen al cálculo de integrales sobre un elemento de referencia \hat{T} ; posteriormente estas integrales se aproximan utilizando fórmulas de cuadratura. A continuación describimos las fórmulas de cuadratura utilizadas. Cada una de las fórmulas que se proponen es exacta para un determinado espacio de polinomios. Sea \hat{T} un triángulo de vértices $\hat{a}_i, 1 \leq i \leq 3$:

- Esquema exacto para polinomios de grado no superior a 1. Uso de 3 nodos.

$$(\mathbf{C1}) : \quad \int_{\hat{T}} \hat{\psi}(\hat{x}) d\hat{x} \sim \frac{1}{3} \text{Area}(\hat{T}) \sum_{i=1}^3 \hat{\psi}(\hat{a}_i), \quad (\text{fórmula de los vértices ó del trapecio}).$$

- Esquema exacto para polinomios de grado no superior a 2. Uso de 3 nodos.

$$(\mathbf{C2}) : \quad \int_{\hat{T}} \hat{\psi}(\hat{x}) d\hat{x} \sim \frac{1}{3} \text{Area}(\hat{T}) \sum_{i=1}^3 \hat{\psi}(\hat{b}_i), \quad (\text{fórmula de los puntos medios}),$$

donde los nodos de cuadratura $\hat{b}_i, 1 \leq i \leq 3$, son los puntos medios de los lados del triángulo, caracterizados por las coordenadas baricéntricas

Nodo	Coordenadas baricéntricas
\hat{b}_1	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
\hat{b}_2	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
\hat{b}_3	$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$

Ejemplo 1

Consideramos el problema estacionario (6.22) en el dominio bidimensional

$$\Omega = B((0, 0), 1) := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$$

y con

$$\mathbf{v}(x_1, x_2) = (x_2, -x_1), \quad A(x) = I(x), \quad f(x) = |x|^{-2/r},$$

siendo $1 < r < 2$. Resolvemos este problema utilizando el método evolutivo (**PD.I**).

Se comprueba fácilmente que la función $f \in L^{r,\infty}(\Omega)$ y $f \notin L^{\beta,\infty}(\Omega)$ para todo $\beta > r$. Entonces, utilizando el Teorema 6.2.1 se deduce que el método numérico es exactamente de orden $2(1 - 1/r)$. Presentamos, para diferentes valores de h y r , con $1 < r < 2$, el orden numérico del error en norma $W_0^{1,1}(\Omega)$ obtenido utilizando el método expuesto. Puesto que no disponemos de la expresión analítica de la solución exacta, calculamos el orden de convergencia a partir de tres soluciones numéricas. Concretamente, si denotamos por ϕ_h , ϕ_{2h} y ϕ_{4h} las soluciones numéricas obtenidas utilizando mallas de tamaño h , $2h$ y $4h$, respectivamente, consideramos la siguiente fórmula

$$p_{W_0^{1,1}(\Omega)} \simeq p_{W_0^{1,1}(\Omega)}^h = \frac{\log\left(\|\phi_{4h} - \phi_{2h}\|_{W_0^{1,1}(\Omega)}\right) - \log\left(\|\phi_{2h} - \phi_h\|_{W_0^{1,1}(\Omega)}\right)}{\log(2)}$$

donde $p_{W_0^{1,1}(\Omega)}$ representa el orden de convergencia que predice la teoría y $p_{W_0^{1,1}(\Omega)}^h$ denota el orden de convergencia numérico.

Calculamos la sucesión $\phi_{h,\Delta t}^{n+1}$, $n \geq 0$ hasta alcanzar el estado estacionario. Para asegurar que se alcanza dicha solución estacionaria imponemos el siguiente test de parada para todas las simulaciones

$$E^n := \frac{\|\phi_{h,\Delta t}^{n+1} - \phi_{h,\Delta t}^n\|_{W_0^{1,1}(\Omega)}}{\Delta t} < 10^{-5}.$$

Consideramos dos mallas no estructuradas, \mathcal{T}_{4h_1} , \mathcal{T}_{4h_2} con 725 y 4166 elementos, respectivamente. A partir de estas dos mallas construimos \mathcal{T}_{2h_1} , \mathcal{T}_{h_1} y \mathcal{T}_{2h_2} , \mathcal{T}_{h_2} de manera que los vértices de las mallas de tamaño $2h_1$ y h_1 (respectivamente, $2h_2$ y h_2) se corresponden, respectivamente, con los vértices y puntos medios de las mallas de tamaño $4h_1$ y $2h_1$ (respectivamente, $4h_2$ y $2h_2$).

En todas las simulaciones consideramos

$$\theta = 1, \quad \Delta t = 0.01, \quad \phi_{h,\Delta t}^0 \equiv 0,$$

y utilizamos la fórmula de cuadratura referenciada por (**C1**) para aproximar las integrales (6.10)-(6.15) y la fórmula (**C2**) para calcular la integral (6.16).

En las Tablas 6.1 y 6.2 presentamos los órdenes de convergencia en norma $W_0^{1,1}(\Omega)$, para las mallas \mathcal{T}_{4h_1} y \mathcal{T}_{4h_2} , respectivamente, y para distintos valores de r , y los comparamos con los órdenes que predice la teoría. Se observa que el orden teórico es óptimo para r próximo a 1 y a 2.

q	r	Orden teórico	Orden numérico
1	1.1	0.1818	0.1381
1	1.5	0.6667	0.6841
1	1.9	0.9474	0.8582

Tabla 6.1: Órdenes de convergencia para el método PSI con la malla \mathcal{T}_{4h_1} .

q	r	Orden teórico	Orden numérico
1	1.1	0.1818	0.1421
1	1.5	0.6667	0.8702
1	1.9	0.9474	0.9480

Tabla 6.2: Órdenes de convergencia para el método PSI con la malla \mathcal{T}_{4h_2} .

En las Figuras 6.2-6.4 se muestran las soluciones numéricas obtenidas con la malla \mathcal{T}_{h_2} para $r = 1.1$, $r = 1.5$ y $r = 1.9$, respectivamente. Nótese que obtenemos soluciones numéricas radiales, esto se debe a que el segundo miembro es radial y a la elección de la \mathbf{v} .

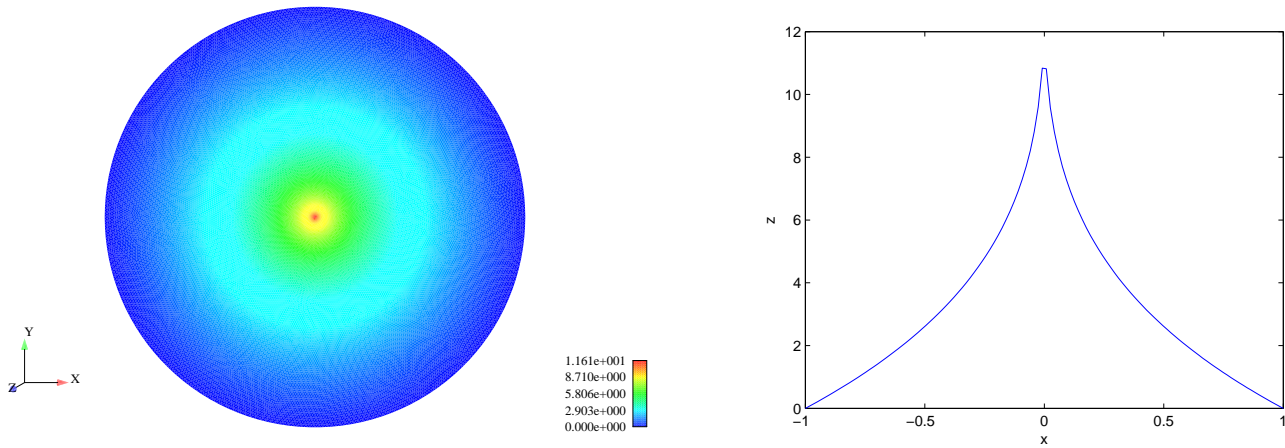


Figura 6.2: Contornos de la solución numérica y la sección $x \rightarrow \phi_h(x, 0)$ calculada utilizando el método PSI para $r = 1.1$.

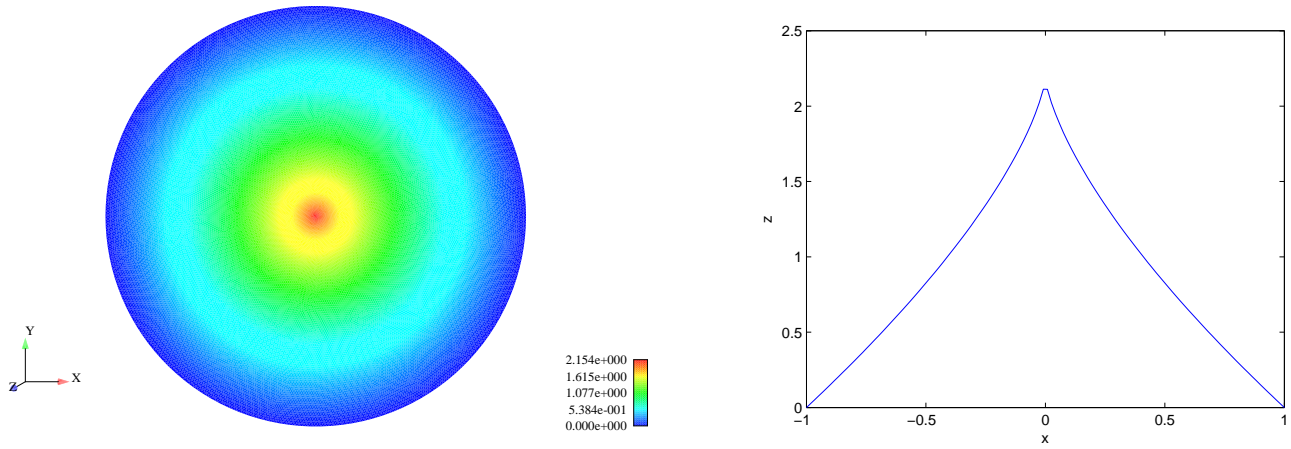


Figura 6.3: Contornos de la solución numérica y la sección $x \longrightarrow \phi_h(x, 0)$ calculada utilizando el método PSI para $r = 1.5$.

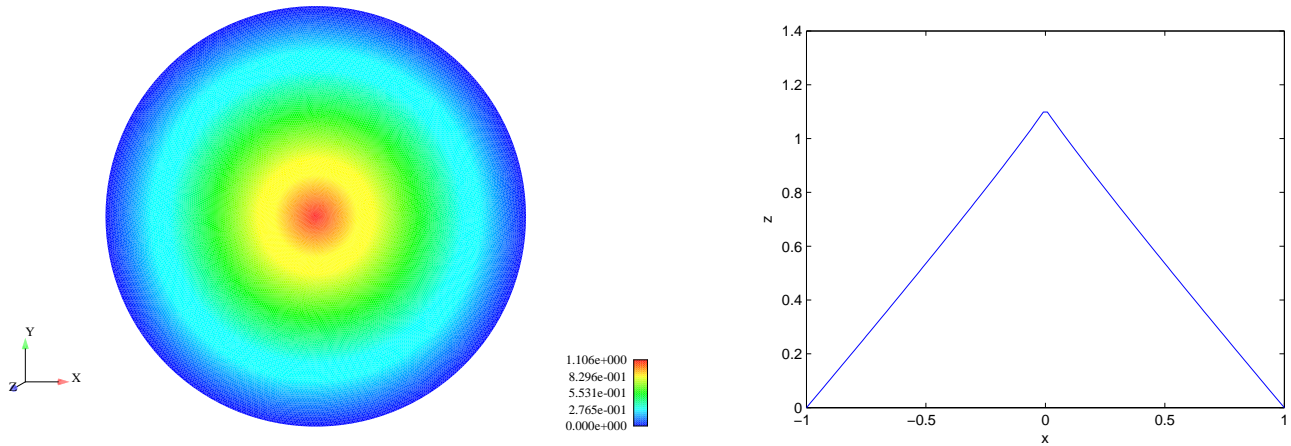


Figura 6.4: Contornos de la solución numérica y la sección $x \longrightarrow \phi_h(x, 0)$ calculada utilizando el método PSI para $r = 1.9$.

Ejemplo 2

A continuación presentamos un test estacionario para el cual analizamos los órdenes de convergencia obtenidos utilizando los métodos **(PD.I)**, **(PD.II)** y el N-esquema. Mostramos los resultados numéricos para distintos valores del coeficiente de difusión. En este ejemplo se pone de manifiesto que el método descentrado **(PD.II)** es más preciso que el método **(PD.I)** para flujos de convección dominante.

Consideramos el problema estacionario (6.22) en el cuadrado unidad $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ y con

$$\mathbf{v}(x_1, x_2) = (1, 0), \quad A(x) = \nu I(x),$$

$$f(x_1, x_2) = x_2 e^{x_1 + x_2} [(x_2 - 1)(x_1^2 + x_1 - 1) - 2x_1 \nu (x_1 x_2 + x_1 + x_2 - 3)].$$

La solución exacta para este problema es

$$\phi(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1 - 1)(x_2 - 1) e^{x_1 + x_2}.$$

Resolvemos este problema utilizando tres métodos numéricos evolutivos distintos : **(PD.I)**, **(PD.II)** y un método análogo a **(PD.I)** que resulta de discretizar el término convectivo utilizando el N-esquema.

En [25] se prueba que, para el estado estacionario, el método PSI **(PD.II)** es bien equilibrado al segundo orden para flujos de convección dominante, además se tiene que el método **(PD.I)** es bien equilibrado al segundo orden para flujos de difusión dominante.

Presentamos, para diferentes valores de ν , el orden numérico del error en norma $W_0^{1,1}(\Omega)$ y las curvas del error obtenidas utilizando el método PSI y el N-esquema. Calculamos el orden de convergencia a partir de dos soluciones numéricas ϕ_h y ϕ_{2h} obtenidas con dos mallas de tamaño h y $2h$, respectivamente, utilizando la siguiente fórmula

$$p_{W_0^{1,1}(\Omega)}^h = \frac{\log \left(\|\Pi_h(\phi) - \phi_{2h}\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} \right) - \log \left(\|\Pi_h(\phi) - \phi_h\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} \right)}{\log(2)}.$$

Consideramos una malla no estructurada \mathcal{T}_{16h_1} con 226 elementos. A partir de esta malla construimos \mathcal{T}_{8h_1} , \mathcal{T}_{4h_1} , \mathcal{T}_{2h_1} y \mathcal{T}_{h_1} , de manera que los vértices de la malla de tamaño ih_1 se corresponden con los vértices y puntos medios de la malla de tamaño $2ih_1$, $i = 8, \dots, 1$.

En todas las simulaciones consideramos

$$\phi_{h,\Delta t}^0 \equiv \Pi_h(\phi), \quad \Delta t = 0.001, \quad \theta = 0.5,$$

y utilizamos la fórmula de cuadratura referenciada por **(C1)** para aproximar las integrales (6.10)-(6.15) y la fórmula **(C2)** para calcular las integrales (6.16) y (6.17).

En las Tablas 6.3, 6.4, 6.5 y 6.6 presentamos los órdenes de convergencia obtenidos en norma $W_0^{1,1}(\Omega)$ para $\nu = 10^3, 1, 0.001, 0$, respectivamente. En las Figuras 6.5, 6.6, 6.7 y 6.8 presentamos las

h	$p_{W_0^{1,1}(\Omega)}^h$ - (PD.I)	$p_{W_0^{1,1}(\Omega)}^h$ - (PD.II)	$p_{W_0^{1,1}(\Omega)}^h$ - N-esquema
$16h_1$	-	-	-
$8h_1$	1.88522	-	1.88524
$4h_1$	1.92700	-	1.92768
$2h_1$	1.96777	-	1.96718
h_1	1.99714	-	1.99732

Tabla 6.3: Órdenes de convergencia para $\nu = 10^3$.

curvas de error obtenidas con los métodos **(PD.I)**, **(PD.II)** y el N-esquema para $\nu = 10^3, 1, 0.001, 0$, respectivamente.

h	$p_{W_0^{1,1}(\Omega)}^h$ - (PD.I)	$p_{W_0^{1,1}(\Omega)}^h$ - (PD.II)	$p_{W_0^{1,1}(\Omega)}^h$ - N-esquema
$16h_1$	-	-	-
$8h_1$	1.04269	0.99177	1.03407
$4h_1$	1.01522	0.97443	1.01142
$2h_1$	0.99976	0.78090	0.99865
h_1	0.99611	-	0.99578

Tabla 6.4: Órdenes de convergencia para $\nu = 1$.

h	$p_{W_0^{1,1}(\Omega)}^h$ - (PD.I)	$p_{W_0^{1,1}(\Omega)}^h$ - (PD.II)	$p_{W_0^{1,1}(\Omega)}^h$ - N-esquema
$16h_1$	-	-	-
$8h_1$	0.73538	0.98432	0.67950
$4h_1$	0.78298	1.49435	0.74295
$2h_1$	0.84923	1.80427	0.83018
h_1	0.90693	1.92306	0.89051

Tabla 6.5: Órdenes de convergencia para $\nu = 0.001$.

h	$p_{W_0^{1,1}(\Omega)}^h$ - (PD.I)	$p_{W_0^{1,1}(\Omega)}^h$ - (PD.II)	$p_{W_0^{1,1}(\Omega)}^h$ - N-esquema
$16h_1$	-	-	-
$8h_1$	0.68181	0.75223	0.61059
$4h_1$	0.69535	0.71820	0.64070
$2h_1$	0.75590	1.04641	0.74472
h_1	0.49787	1.06130	0.79575

Tabla 6.6: Órdenes de convergencia para $\nu = 0$.

Se observa que para flujos de convección dominante el método **(PD.II)** es más preciso que el método **(PD.I)**, concretamente para $\nu = 0.001$ el método **(PD.II)** es asintóticamente de segundo orden. Además, como predice la teoría, se observa que para flujos de difusión dominante el método **(PD.I)** es de segundo orden.

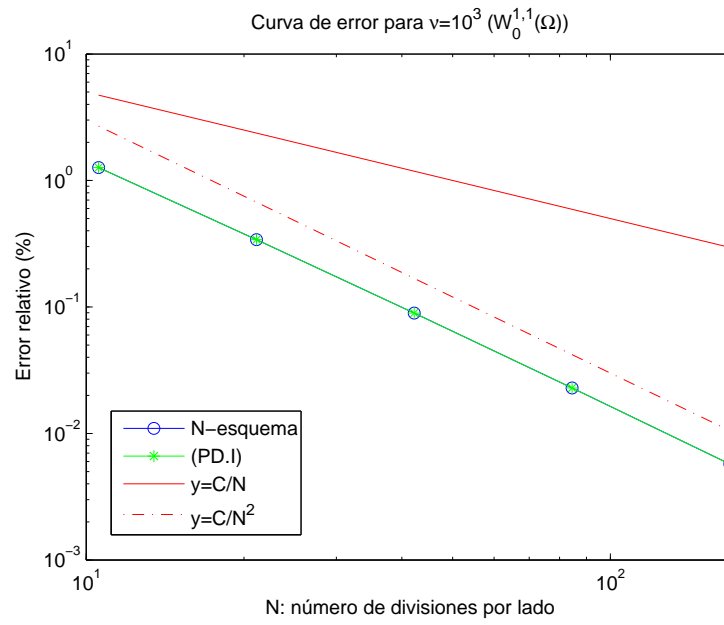


Figura 6.5: Curvas de error para $\nu = 10^3$.

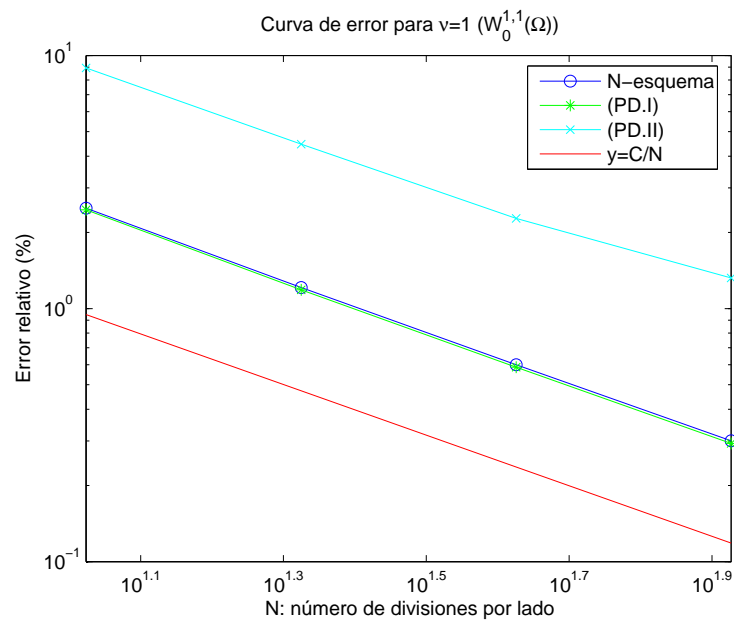
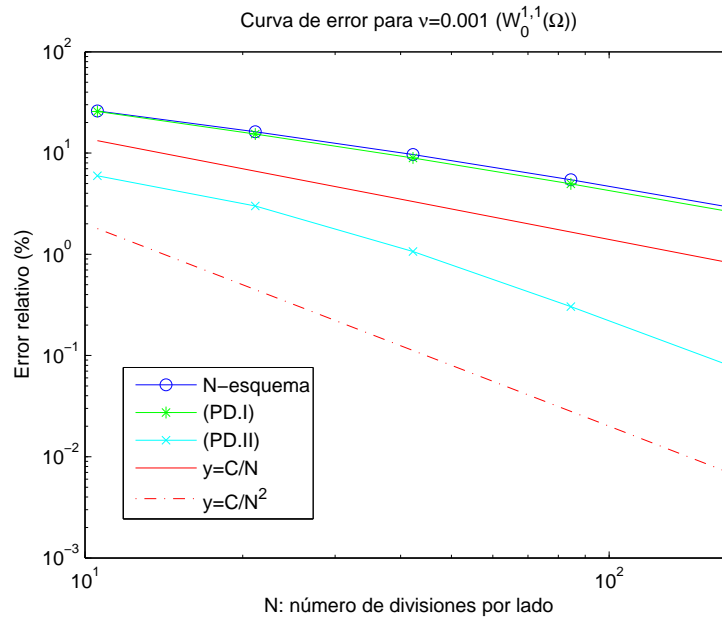
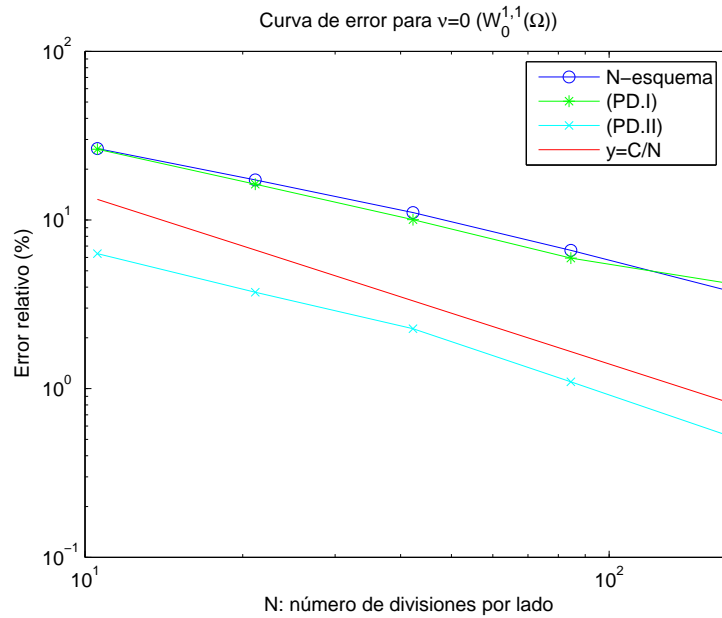


Figura 6.6: Curvas de error para $\nu = 1$.

Figura 6.7: Curvas de error para $\nu = 0.001$.Figura 6.8: Curvas de error para $\nu = 0$.

Ejemplo 3

A continuación presentamos un test evolutivo que resolvemos numéricamente utilizando los métodos (PD.I) y (PD.II).

En la literatura, no hay resultados teóricos que permitan conocer el orden del error del método PSI para el caso evolutivo. Sin embargo, se espera obtener orden uno en espacio puesto que estamos utilizando elementos finitos lineales y orden dos en tiempo para $\theta = 1/2$ y orden uno para $\theta \neq 1/2$.

Para validar los programas informáticos desarrollados se realizan simulaciones numéricas de ejemplos test y se comparan los resultados obtenidos con la solución proporcionada por un paquete de libre distribución, desarrollado por F. Hecht, O. Pironneau y K. Ohtsuka, llamado Freefem++.

Consideramos el problema de convección-difusión evolutivo (5.1)-(5.3) en el cuadrado unidad $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ y con

$$\mathbf{v}((x_1, x_2), t) = (-x_2, x_1), \quad A(x) = I(x), \quad \rho(x) = 1$$

$$f((x_1, x_2), t) = e^{t(x_1+x_2)} (x_1 + x_2 - 2t^2 + t(x_1 - x_2)).$$

La solución exacta para este problema es

$$\phi((x_1, x_2), t) = e^{t(x_1+x_2)}.$$

Presentamos las curvas del error espaciales y temporales obtenidas utilizando el método PSI. Para analizar el orden de convergencia temporal consideramos el espacio $l^\infty(L^2(\Omega))$, es decir

$$E_1(\phi) = \max_{n=0}^N \|\Pi_h(\phi^n) - \phi_h^n\|_{L^2(\Omega)},$$

donde la norma $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ se calcula exactamente utilizando la fórmula de cuadratura referenciada por **(C2)**.

Análogamente, el orden de convergencia espacial se analiza en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ y $l^\infty(H^1(\Omega))$, es decir calculamos también

$$E_2(\phi) = \max_{n=0}^N \|\Pi_h(\phi^n) - \phi_h^n\|_{H^1(\Omega)},$$

donde la norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ se calcula exactamente.

Para obtener las curvas de error espaciales consideramos $\Delta t = 0.0001$, $\theta = 1$ y las mallas utilizadas en el ejemplo anterior y para las curvas de error temporales utilizamos una malla no estructurada con 90198 elementos. En las Figuras 6.10 y 6.11 presentamos, respectivamente, las curvas de error espaciales en norma $l^\infty(H^1(\Omega))$ y $l^\infty(L^2(\Omega))$. En la Figura 6.9 mostramos las curvas de error temporales obtenidas con el método **(PD.II)** para $\theta = 1, 0.5$.

Se observa que para $\theta = 1$ el método es de primer orden en tiempo y para $\theta = 0.5$ es de segundo orden en tiempo. Además, se obtiene un error espacial que es de primer orden en norma $l^\infty(H^1(\Omega))$ y asintóticamente de primer orden en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$.

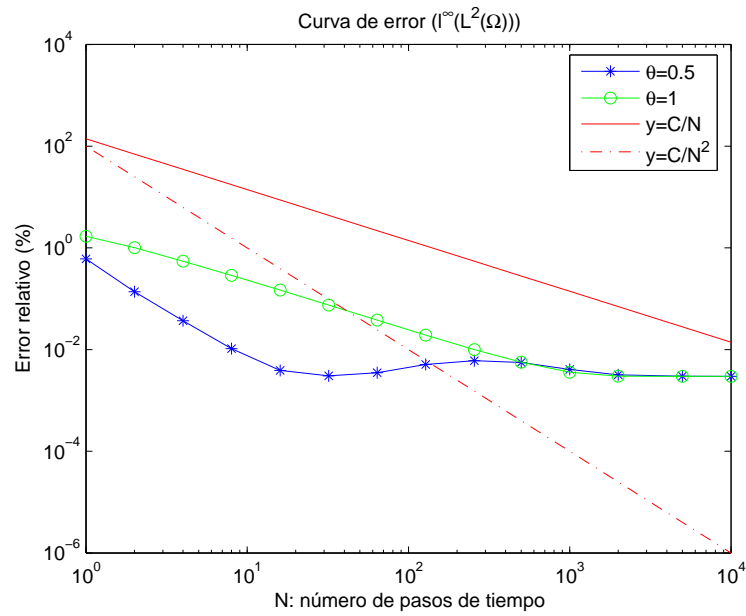
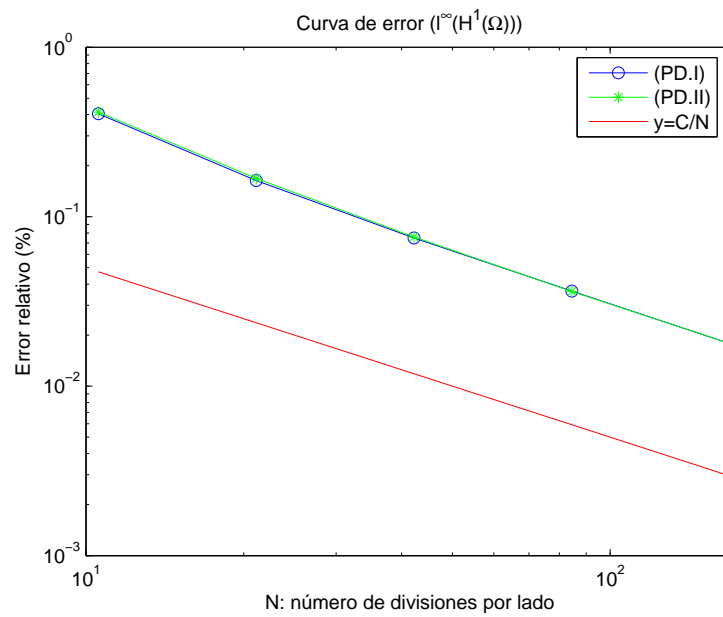


Figura 6.9: Curvas de error temporales.

Figura 6.10: Curvas de error espaciales en norma $l^\infty(H^1(\Omega))$.

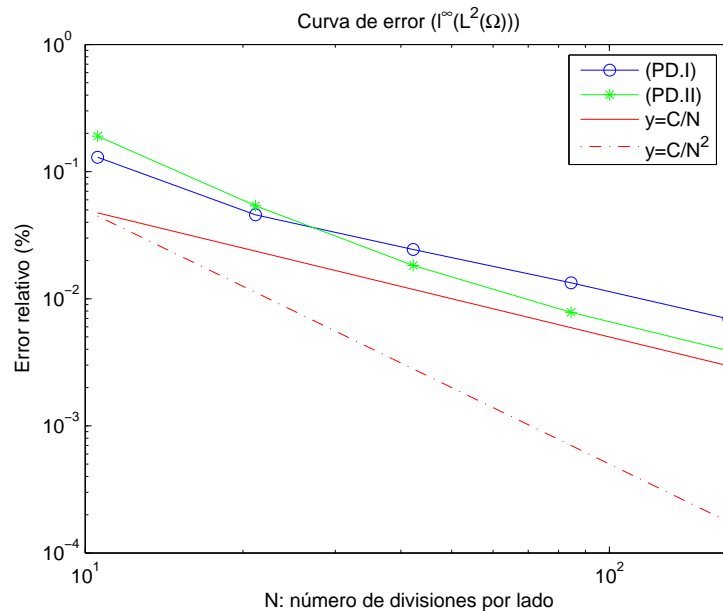


Figura 6.11: Curvas de error espaciales en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$.

Ejemplo 4

A continuación presentamos los resultados numéricos obtenidos con el método **(PD.I)** para el Ejemplo 2 de la Sección 4.4. Comparamos dichos resultados numéricos con los obtenidos con los métodos de características $(\mathcal{LG})_1$, $(\mathcal{LG})_2$, $(\mathcal{SLG})_1^2$ y $(\mathcal{SLG})_2^2$. En todas las simulaciones tomamos $\theta = 1/2$.

En primer lugar, analizamos los tiempos de cálculo para los distintos métodos. Estos datos los presentamos en la Tabla 6.7. El método PSI es más rápido que los métodos $(\mathcal{LG})_2$ y $(\mathcal{SLG})_2^1$. Sin embargo resulta menos eficiente que el método semi-lagrangiano de dos pasos, $(\mathcal{SLG})_2^2$, ésto se debe en parte a que la matriz correspondiente al método PSI es en general no simétrica y depende del paso de tiempo ($1.3 s$ en factorizar y resolver frente a $5.5E - 02 s$).

Calculamos la norma $\|\phi_{h,\Delta t}^m\|_{1,2,\Omega}$ en distintos pasos y para los diferentes métodos. Los resultados se muestran en la Tabla 6.8. En la Figura 6.12 representamos la solución aproximada en el instante final $T = 1$ calculada usando el método PSI. En este caso no se observan oscilaciones cerca de la capa de transición, como ocurría con los métodos semi-lagrangianos (ver Figura 4.7). Sin embargo es un método que difunde más que los métodos $(\mathcal{LG})_1$, $(\mathcal{LG})_2$ y $(\mathcal{SLG})_2^1$. Nótese que para el método PSI utilizamos espacios de elementos finitos lineales, mientras que para los métodos de características empleamos elementos finitos cuadráticos. Para el método PSI usamos las mismas mallas que utilizamos para resolver con los métodos de características, siendo los vértices del mallado \mathbb{P}_1 los nodos de la malla \mathbb{P}_2 .

	Matriz	Seg. Miembro	Total
$(\mathcal{LG})_2$	3.515625	5.250000	16.72656
$(\mathcal{SLG})_2^1$	3.515625	8.207031	13.94922
$(\mathcal{SLG})_2^2$	1.17187E-02	1.621094	1.988281
PSI	7.8125E-01	1.589844	5.832031

Tabla 6.7: Tiempos de cálculo (en segundos) ($N = 100$, para el PSI $h = 1/64$, y para para los demás $h = 1/32$).

Método Numérico tiempo (t)	$(\mathcal{LG})_2$	$(\mathcal{LG})_1$	$(\mathcal{SLG})_2^1$	$(\mathcal{SLG})_2^2$	\mathcal{PSI}
0	1.4493	1.4493	1.4493	1.4493	1.4493
1/6	3.2350	3.4496	3.3067	3.6304	3.1160
1/3	3.3497	3.1667	3.3536	3.7300	3.1188
1/2	3.3687	3.1290	3.3605	3.7622	3.1562
2/3	3.3776	3.1398	3.3628	3.7722	3.1378
5/6	3.3829	3.1440	3.3637	3.7758	3.1212
1	3.3828	3.1448	3.3640	3.7772	3.1208

Tabla 6.8: Norma $H^1(\Omega)$ de la solución aproximada ($h = 1/32$, para el PSI, $h = 1/16$ para los demás, $\Delta t = 1/60$).

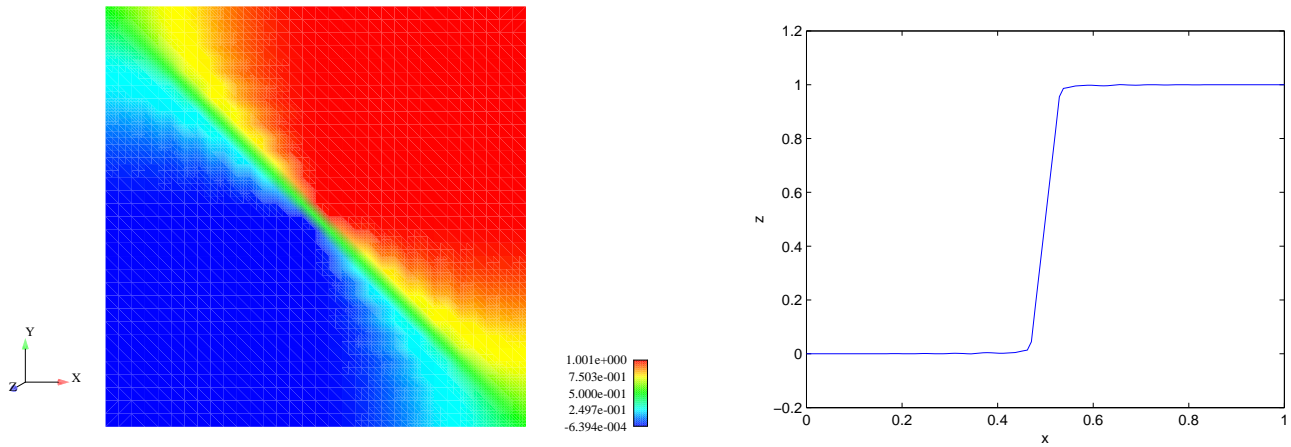


Figura 6.12: Contornos de la solución aproximada $\phi_{h,\Delta t}^N$ y las secciones $x \rightarrow \phi_{h,\Delta t}^N(x, 1/2)$ calculada con el método PSI, ($h = 1/32$, $\Delta t = 1/60$).

Parte III

Aplicación a la Convección Natural

Introducción

Las variaciones de temperatura que se producen en un fluido provocan variaciones espaciales de su densidad, ello ocasiona que, al estar sometido a la fuerza de la gravedad, se genere un movimiento. Este proceso se conoce con el nombre de convección natural y presenta numerosas aplicaciones en situaciones reales, por ejemplo, cuando se tratan problemas de climatización en arquitectura (ver [41]), de contaminación marina (enfriamiento del fuel en el Prestige), de diseño de ventanas de doble cristal (ver [47]), etc. Las más importantes suceden en la dinámica del océano y la atmósfera.

Típicamente, los fenómenos de transporte en un fluido están gobernados por las ecuaciones básicas de conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía. Sin embargo en el caso de la convección natural generalmente se utiliza la aproximación de Boussinesq (ver [50]). Aspectos como la no linealidad de las ecuaciones constitutivas y la restricción de incompresibilidad, hacen del estudio del transporte de un fluido un problema de gran complejidad. Desde el punto de vista práctico, esta complejidad se traduce en que los requerimientos computacionales, tanto de memoria como de tiempo de cálculo, sean enormes.

Dado el carácter evolutivo del problema que se quiere analizar y la importancia de la convección en el mismo y para obtener esquemas descentrados, utilizamos el método de las características o alternatively el método PSI en combinación con métodos de elementos finitos, para resolver numéricamente el problema acoplado de las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía (ver, por ejemplo, [19], [20], [22], [25]). Puesto que uno de los objetivos de la simulación propuesta en esta parte es el estudio de la evolución de un fluido para tiempos grandes, se incorporan métodos de características semi-Lagrangianos y Lagrangianos de orden dos y el método PSI para la discretización de los términos convectivos (ver por ejemplo [22]). Con ello se pretende obtener esquemas que permitan considerar pasos de tiempo mayores con objeto de acortar el tiempo de cálculo necesario para la simulación. Uno de los métodos de características que utilizamos se propone y analiza en [40] para las ecuaciones de convección-difusión unidimensionales, y en [22] para las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles.

Los algoritmos obtenidos se implementan mediante programas de ordenador escritos en Fortran. Con objeto de testear los métodos propuestos resolvemos un problema bidimensional de convección natural en una cavidad cuadrada donde las paredes verticales se encuentran a distintas temperaturas. Existe numerosa bibliografía que resuelve este problema para validar códigos computacionales desarrollados para problemas térmicos de convección. Por ejemplo, en [26] se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes para el movimiento convectivo laminar de un gas en una cavidad con grandes diferencias de temperatura horizontales. Vahl Davis [35] utiliza un método de diferencias finitas para resolver el problema en función de la vorticidad; para la derivada temporal se utilizan diferencias hacia adelante y para la derivada espacial diferencias centradas de segundo orden. Utilizando un proceso de extrapolación de Richardson se obtiene una solución numérica de referencia. Utilizamos esta solución numérica para analizar la precisión de los métodos propuestos y validar los programas de ordenador.

En el *Capítulo 7* se recuerdan los modelos matemáticos implicados en los fenómenos de transporte de un fluido; como caso particular se obtienen los modelos matemáticos implicados en los procesos de

convección natural (ver [18]). Los modelos se plantean sobre un dominio bidimensional. Planteamos un problema de Cauchy y obtenemos formulaciones débiles.

En el *Capítulo 8* en primer lugar, planteamos una discretización espacial utilizando un método de elementos finitos. Presentamos estrategias diferentes de discretización del término convectivo: métodos de características semi-Lagrangianos y Lagrangianos de orden dos y el método PSI presentado en el Capítulo 5. En segundo lugar, resolvemos el movimiento bidimensional de un fluido en una cavidad cuadrada donde las paredes verticales se encuentran a distintas temperaturas y comparamos los resultados numéricos obtenidos con los presentados por otros autores.

Capítulo 7

Modelización matemática

7.1. Introducción

En la primera parte de este capítulo se recuerdan los modelos matemáticos implicados en los fenómenos de transporte de un fluido. Obtenemos las ecuaciones de Boussinesq que modelan los procesos de convección natural en un fluido. Se trata de una aproximación del modelo para un proceso termodinámico próximo a un proceso estacionario en equilibrio mecánico, cuya única fuerza es la gravitatoria.

En segundo lugar, introducimos en las ecuaciones obtenidas magnitudes sin dimensiones y determinamos los parámetros adimensionales de los que dependen las variables buscadas. Proponemos un problema de Cauchy y planteamos formulaciones débiles.

7.2. Modelo matemático general

En esta sección obtenemos, en primer lugar, la ecuación de la energía para un fluido en movimiento, Newtoniano y compresible; a continuación obtenemos las ecuaciones fluidodinámicas.

Adoptamos, en parte, la notación introducida en la Sección 1.2. Concretamente, Ω es el dominio bidimensional ocupado por el fluido y Γ su frontera. Denotamos por $[0, t_f]$ el intervalo de tiempo en el que estudiamos el proceso. Además, $x=(x_1, x_2)$ son los puntos de Ω y $\mathbf{v}(x, t)=(u(x, t), v(x, t))$, $\pi(x, t)$ y $\phi(x, t)$ es la velocidad, la presión y la temperatura, respectivamente, de un punto $x \in \Omega$ en el instante $t \in [0, t_f]$.

Empleamos la notación utilizada para la mecánica de medios continuos (ver por ejemplo [18]). Entonces, para el caso general, la ecuación de la energía en la forma no conservativa derivada del primer principio de la Termodinámica y en función de la energía interna específica e , toma la siguiente forma:

$$\rho \dot{e} = T \cdot D - \operatorname{div} \mathbf{q} + f, \quad (7.1)$$

donde T representa el tensor de esfuerzos de Cauchy, \mathbf{q} el flujo de calor, ρ la densidad del material y $D = \frac{L + L^t}{2}$, siendo $L = \operatorname{grad} \mathbf{v}$. En (7.1) \dot{e} denota la derivada material de e definida en (1.11). En adelante suponemos que el fluido es un material de Coleman-Noll.

Observación 7.2.1. Recordamos que para un material de Coleman-Noll el flujo de calor \mathbf{q} y el tensor de

esfuerzos de Cauchy T verifican

$$\mathbf{q}(x, t) = \widehat{\mathbf{q}}(F(p, t), s(x, t), \text{grad } \phi(x, t), p), \quad (7.2)$$

$$T(x, t) = \widehat{T}(F(p, t), s(x, t), p) + \widehat{l}(F(p, t), s(x, t), p)(L(x, t)), \quad (7.3)$$

donde $x = X_e(p, t)$, $F = \nabla X_e$, s representa la entropía específica y $\widehat{\mathbf{q}}$, \widehat{T} y \widehat{l} son funciones suficientemente regulares que se conocen como funciones de respuesta del material.

Además, se tiene

$$\dot{e}(x, t) = \phi(x, t)\dot{s}(x, t) + \frac{1}{\rho(x, t)}\widehat{T}(F(p, t), s(x, t), p) \cdot L. \quad (7.4)$$

Sustituyendo en (7.1) la expresión para \dot{e} dada en (7.4) obtenemos que, para un material de Coleman-Noll, la ecuación de la energía toma la siguiente forma

$$\rho\phi\dot{s} = l(L) \cdot D - \text{div } \mathbf{q} + f. \quad (7.5)$$

Para el caso de un fluido se puede comprobar que \dot{s} admite la siguiente expresión (véase por ejemplo [18])

$$\dot{s} = \frac{c_\pi}{\phi}\dot{\phi} - \frac{\alpha}{\rho}\dot{\pi}, \quad (7.6)$$

donde α y c_π denotan, respectivamente, el coeficiente de expansión térmica a presión constante y el coeficiente de calor específico a presión constante, definidos por $\alpha(x, t) = \widehat{\alpha}(\phi(x, t), \pi(x, t), p)$ y $c_\pi(x, t) = \widehat{c}_\pi(\phi(x, t), \pi(x, t), p)$, donde $\widehat{\alpha}$ y \widehat{c}_π vienen dados por

$$\widehat{\alpha}(\phi, \pi, p) := \frac{1}{\widehat{\nu}(\phi, \pi, p)} \left(\frac{\partial \widehat{\nu}}{\partial \phi} \right) (\phi, \pi, p), \quad (7.7)$$

$$\widehat{c}_\pi(\phi, \pi, p) := \frac{\partial \widehat{h}}{\partial \phi}(\phi, \pi, p), \quad (7.8)$$

siendo $\nu = \frac{1}{\rho}$ y \widehat{h} la función de respuesta asociada a la entalpía específica h donde h se define como sigue

$$h(x, t) = e(x, t) + \frac{\pi(x, t)}{\rho(x, t)}. \quad (7.9)$$

Introduciendo en la ecuación (7.7) la expresión dada para ν se deduce que

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \phi} \right)_\pi. \quad (7.10)$$

Entonces sustituyendo en la ecuación (7.5) la expresión dada en (7.6) para \dot{s} , obtenemos que, para el caso de un fluido en movimiento, la ecuación de la energía adopta la siguiente forma:

$$\rho c_\pi \dot{\phi} - \alpha \phi \dot{\pi} = l(L) \cdot D - \text{div } \mathbf{q} + f. \quad (7.11)$$

Observación 7.2.2. Recordamos que para un fluido Newtoniano y viscoso las funciones de respuesta $\widehat{\mathbf{q}}$ y \widehat{l} verifican

$$\widehat{\mathbf{q}}(F, y, \mathbf{w}, p) = \widehat{\mathbf{q}}(\nu, y, \mathbf{w}, p) = -\widehat{k}(\nu, y, |\mathbf{w}|^2, p)\mathbf{w}, \quad (7.12)$$

$$\widehat{l}(F, y, p)(L) = \widehat{l}(\nu, y, p)(D) = 2\widehat{\eta}(\nu, y, p)D + \widehat{\xi}(\nu, y, p) \text{tr}(D)I, \quad (7.13)$$

donde y puede ser reemplazado por s o por ϕ y $\nu := \frac{\det F}{\rho_0}$ siendo ρ_0 la densidad de referencia. En la ecuación (7.13) η y ξ representan, respectivamente, la viscosidad dinámica del fluido y el segundo coeficiente de viscosidad. Como consecuencia, se tiene que el flujo de calor \mathbf{q} y el operador de viscosidad l admiten las expresiones

$$\mathbf{q} = -\widehat{k}(\nu, y, |\text{grad } \phi|^2, p) \text{grad } \phi, \quad (7.14)$$

$$l = 2\widehat{\eta}(\nu, y, p)D + \widehat{\xi}(\nu, y, p) \text{tr}(D)I. \quad (7.15)$$

En este trabajo consideramos un fluido viscoso y Newtoniano, entonces sustituyendo estas expresiones en la ecuación de la energía (7.11), obtenemos

$$\rho c_\pi \dot{\phi} - \alpha \phi \dot{\pi} - \operatorname{div} (k \operatorname{grad} \phi) = \frac{1}{2} \eta |\operatorname{grad} \mathbf{v} + \operatorname{grad} \mathbf{v}^t|^2 + \xi (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + f. \quad (7.16)$$

Para el caso general de un movimiento bidimensional, el campo de corrientes está determinado por el vector velocidad con dos componentes $\mathbf{v} = (u, v)$, además de la presión π y la densidad ρ . Para la determinación de estas cuatro magnitudes disponemos de la ecuación de conservación de la masa, de las dos ecuaciones del movimiento (conservación de la cantidad del movimiento) y de la ecuación termodinámica de estado¹.

A continuación establecemos las ecuaciones del movimiento de un fluido compresible, viscoso y Newtoniano. Para el movimiento no estacionario la ecuación de conservación de la masa se expresa de la siguiente forma conservativa

$$\rho' + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (7.17)$$

o equivalentemente, admite la siguiente forma no conservativa

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (7.18)$$

Para un fluido incompresible, es decir, densidad constante, la ecuación de conservación de la masa toma la forma simplificada

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (7.19)$$

Por otra parte, la ecuación general del movimiento es

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div} T + \mathbf{b}, \quad (7.20)$$

donde $\dot{\mathbf{v}}$ es la derivada material de \mathbf{v} definida en (1.11). Consideramos un fluido viscoso y Newtoniano, por lo que el tensor de esfuerzos T admite la siguiente expresión

$$T(x, t) = -\pi(x, t)I + l(x, t)(L(x, t)). \quad (7.21)$$

Utilizando el principio de indiferencia material se puede comprobar que l toma la forma dada en (7.15). Sustituyendo las expresiones (7.15) y (7.21) en la ecuación (7.20) obtenemos

$$\rho \dot{\mathbf{v}} + \operatorname{grad} \pi - \operatorname{div} \{ \eta (\operatorname{grad} \mathbf{v} + \operatorname{grad} \mathbf{v}^t) + \xi \operatorname{div} \mathbf{v} I \} = \mathbf{b}. \quad (7.22)$$

Entonces el flujo de un fluido compresible y Newtoniano está gobernado por las ecuaciones (7.16), (7.18) y (7.22). Con el objetivo de completar el sistema añadimos una ecuación de estado, por ejemplo

$$\rho = \hat{\rho}(\phi, \pi). \quad (7.23)$$

7.3. Aproximación de Boussinesq

En esta sección, en primer lugar obtenemos las ecuaciones de Boussinesq que modelan los procesos de convección natural en un fluido (ver [18]). Se trata de una aproximación del modelo para un proceso termodinámico próximo a un proceso estacionario en equilibrio mecánico, cuya única fuerza es la gravitatoria $\mathbf{b} = \rho \mathbf{g}$.

En segundo lugar introducimos en las ecuaciones obtenidas magnitudes sin dimensiones y determinamos los parámetros adimensionales de los que dependen las variables buscadas (ver [72]).

¹En realidad debemos considerar también como incógnita la temperatura ϕ , puesto que está presente en la ecuación de estado. Por tanto hay que añadir la ecuación de la energía a las ecuaciones anteriores.

7.3.1. Linealización

En primer lugar recordamos la siguiente definición

Definición 7.3.1. *Un proceso termodinámico estacionario es un **equilibrio mecánico** si $\mathbf{v} \equiv 0$.*

Denotamos con el subíndice 0 las funciones correspondientes a un proceso estacionario en equilibrio mecánico cuya única fuerza es la gravedad. Entonces $\mathbf{v}_0 \equiv 0$ y todas las funciones son independientes de la variable temporal, por tanto la ecuación del movimiento adopta la forma

$$\text{grad } \pi_0 = \rho_0 \mathbf{g}. \quad (7.24)$$

Consideramos un proceso termodinámico próximo al equilibrio mecánico en el siguiente sentido:

$$\alpha_0(\phi - \phi_0) = O(\varepsilon), \quad \kappa_0(\pi - \pi_0) = O(\varepsilon), \quad (7.25)$$

donde κ_0 es el coeficiente de compresibilidad isoterma dado por,

$$\kappa_0 = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \pi} \right)_{\phi, 0},$$

y ε es un parámetro pequeño.

En primer lugar, se tiene la siguiente expresión para la ecuación de conservación de la masa (ver por ejemplo [18] Corolario 10.4.6)

$$-\alpha \dot{\phi} + \kappa \dot{\pi} + \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (7.26)$$

Entonces, utilizando (7.25), obtenemos la siguiente aproximación de la ecuación de conservación de la masa

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (7.27)$$

Denotamos por π_E la fluctuación Euleriana de la presión definida por

$$\pi_E(x, t) = \pi(x, t) - \pi_0(x). \quad (7.28)$$

Entonces, utilizando (7.24), se tiene

$$\text{grad } \pi = \text{grad } \pi_0 + \text{grad } \pi_E = \rho_0 \mathbf{g} + \text{grad } \pi_E. \quad (7.29)$$

Además, haciendo un desarrollo de Taylor de (7.23) en torno a (ϕ_0, π_0) y utilizando (7.25) obtenemos

$$\rho = \rho_0 - \alpha_0 \rho_0 (\phi - \phi_0) + \kappa_0 \rho_0 (\pi - \pi_0) + o(\varepsilon). \quad (7.30)$$

Aproximando $\rho \dot{\mathbf{v}}$ y η por $\rho_0 \dot{\mathbf{v}}$ y η_0 , respectivamente, y utilizando (7.27), (7.28) y (7.30) obtenemos la siguiente aproximación de la ecuación del movimiento (7.22)

$$\rho_0 \dot{\mathbf{v}} + \text{grad } \pi_E - \text{div } (2\eta_0 D) = \rho_0 [-\alpha_0(\phi - \phi_0) + \kappa_0(\pi - \pi_0)] \mathbf{g}. \quad (7.31)$$

Las ecuaciones (7.27) y (7.31) son análogas a las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles. En la ecuación (7.31) está presente la temperatura, por tanto tendremos que añadir la ecuación de la energía a las ecuaciones anteriores. Aproximando ρc_π , $\alpha \phi$, η y k por $\rho_0 c_{\pi_0}$, $\alpha_0 \phi_0$, η_0 y k_0 , respectivamente, y utilizando (7.27), obtenemos la siguiente aproximación de (7.16)

$$\rho_0 c_{\pi_0} \dot{\phi} - \alpha_0 \phi_0 \dot{\pi} = 2\eta_0 |D|^2 + \text{div } (k_0 \text{grad } \phi) + f. \quad (7.32)$$

Generalmente los términos que involucran a la presión y a la disipación viscosa en estas ecuaciones son pequeños comparados con los otros términos por lo que los despreciaremos. En este caso, las ecuaciones (7.27), (7.31) y (7.32) constituyen el modelo de Boussinesq para la convección natural.

7.3.2. Ecuaciones adimensionales

A continuación vamos a obtener la forma adimensionalizada de las ecuaciones de Boussinesq, deduciendo en particular los parámetros sin dimensiones de los que dependen las soluciones buscadas. Para ello suponemos que los coeficientes ρ_0 , α_0 , η_0 , k_0 , ϕ_0 y $c_{\pi 0}$ son constantes y $f = 0$. Introducimos en las ecuaciones (7.27), (7.31) y (7.32) parámetros sin dimensiones. Elegimos las cantidades L , $\frac{\lambda_0}{L}$, $\frac{L^2}{\lambda_0}$ y $\frac{\rho_0 \lambda_0^2}{L^2}$ como factores de escala para longitud, velocidad, tiempo y presión, siendo L una longitud de comparación conveniente, ρ_0 la densidad en el estado inicial y λ_0 la difusividad térmica ($\lambda_0 = \frac{k_0}{\rho_0 c_{\pi 0}}$). La diferencia de temperatura respecto de la temperatura de referencia ϕ_0 , $\tilde{\phi} = \phi - \phi_0$ se hace adimensional con relación a la diferencia entre la temperatura de la pared y la del fluido en el estado inicial $(\Delta\phi)_0 = \phi_w - \phi_0$. Es decir, si designamos las magnitudes sin dimensiones con un asterisco, se tiene :

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{x_1}{L} & x_2^* &= \frac{x_2}{L} & u^* &= \frac{uL}{\lambda_0} & v^* &= \frac{vL}{\lambda_0} & t^* &= \frac{t\lambda_0}{L^2} \\ \pi_E^* &= \frac{\pi_E L^2}{\rho_0 \lambda_0^2} & \phi^* &= \frac{\phi - \phi_0}{\phi_w - \phi_0} = \frac{\phi - \phi_0}{(\Delta\phi)_0} & \rho^* &= \frac{\rho_0}{\rho_0} = 1. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Introduciendo estas semejanzas en las ecuaciones (7.27), (7.31) y (7.32) obtenemos las siguientes ecuaciones adimensionales en función de la velocidad $\mathbf{v}^* = (u^*, v^*)$, la presión π_E^* y la temperatura ϕ^* .

Continuidad:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x_2^*} = 0. \quad (7.34)$$

Movimiento:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \text{grad}^* \mathbf{v}^* \mathbf{v}^* + \text{grad}^* \pi_E^* = - \frac{\alpha_0 (\Delta\phi)_0 L^3}{\lambda_0^2} \phi^* \mathbf{g} + \frac{\eta_0}{\rho_0 \lambda_0} \Delta^* \mathbf{v}^*. \quad (7.35)$$

Energía:

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \text{grad}^* \phi^* = \Delta^* \phi^*. \quad (7.36)$$

Entonces los parámetros adimensionales presentes en el modelo son:

$$\frac{g\alpha_0 (\Delta\phi)_0 L^3}{\lambda_0^2} \text{ y } Pr = \frac{\eta_0}{\rho_0 \lambda_0} = \frac{\nu_0}{\lambda_0}, \quad (7.37)$$

siendo $\nu_0 = \frac{\eta_0}{\rho_0}$ la viscosidad cinemática. La segunda de las magnitudes, Pr , es el número de Prandtl y representa la razón entre la viscosidad y la difusividad térmica. El primer parámetro se puede escribir como

$$\frac{g\alpha_0 (\Delta\phi)_0 L^3}{\lambda_0^2} = \frac{g\alpha_0 (\Delta\phi)_0 L^3}{\lambda_0 \nu_0} \frac{\nu_0}{\lambda_0} = Ra Pr, \quad (7.38)$$

donde aparece una nueva magnitud sin dimensiones, el número de Rayleigh:

$$Ra = \frac{g\alpha_0 (\Delta\phi)_0 L^3}{\lambda_0 \nu_0}. \quad (7.39)$$

Este número está asociado a la transferencia de calor en el fluido y mide la proporción entre las fuerzas de flotabilidad y las fuerzas viscosas. Cuando el número de Rayleigh está por debajo de un valor crítico, la transferencia de calor se produce fundamentalmente por conducción; cuando esta magnitud está por encima de dicho valor crítico, la transferencia de calor se produce por convección. Además, en el último caso, si el número de Rayleigh supera un cierto umbral el flujo se vuelve inestable. Esta inestabilidad,

conocida como inestabilidad de Rayleigh-Bénard, aparece cuando se acoplan los procesos dinámicos y térmicos (ver por ejemplo [72]).

La ecuación de la continuidad adimensional se obtiene de forma inmediata a partir de la ecuación (7.27).

Veamos que, en efecto, a partir de la ecuación del movimiento dada en (7.31) y considerando las variables adimensionales introducidas en (7.33), resulta la ecuación adimensional (7.35).

Puesto que el fluido es incompresible y el coeficiente de viscosidad es constante se tiene la siguiente expresión para la ecuación del movimiento (7.31):

$$\rho_0 (\mathbf{v}' + \text{grad } \mathbf{v}\mathbf{v}) + \text{grad } \pi_E - \eta_0 \Delta \mathbf{v} = -\rho_0 \alpha_0 (\phi - \phi_0) \mathbf{g}. \quad (7.40)$$

Teniendo en cuenta las semejanzas dadas en (7.33), se tiene:

$$u((x_1, x_2), t) = u^* \left(\left(\frac{x_1}{L}, \frac{x_2}{L} \right), \frac{t\lambda_0}{L^2} \right) \cdot \frac{\lambda_0}{L}, \quad (7.41)$$

$$v((x_1, x_2), t) = v^* \left(\left(\frac{x_1}{L}, \frac{x_2}{L} \right), \frac{t\lambda_0}{L^2} \right) \cdot \frac{\lambda_0}{L}, \quad (7.42)$$

$$\pi_E((x_1, x_2), t) = \pi_E^* \left(\left(\frac{x_1}{L}, \frac{x_2}{L} \right), \frac{t\lambda_0}{L^2} \right) \cdot \frac{\rho_0 \lambda_0^2}{L^2}, \quad (7.43)$$

de las expresiones (7.41)-(7.43), se deducen trivialmente las siguientes igualdades:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}((x_1, x_2), t) = \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*}((x_1^*, x_2^*), t^*) \frac{\lambda_0^2}{L^3}, \quad (7.44)$$

$$\text{grad } \mathbf{v}((x_1, x_2), t) = \text{grad }^* \mathbf{v}^*((x_1^*, x_2^*), t^*) \frac{\lambda_0}{L^2}, \quad (7.45)$$

$$\text{grad } \pi_E((x_1, x_2), t) = \text{grad }^* \pi_E^*((x_1^*, x_2^*), t^*) \frac{\rho_0 \lambda_0^2}{L^3}, \quad (7.46)$$

$$\Delta \mathbf{v}((x_1, x_2), t) = \Delta^* \mathbf{v}^*((x_1^*, x_2^*), t^*) \frac{\lambda_0}{L^3}. \quad (7.47)$$

Dividiendo por ρ_0 la ecuación (7.40), introduciendo estas relaciones y teniendo en cuenta las semejanzas dadas en (7.33) obtenemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} \cdot \frac{\lambda_0^2}{L^3} + \text{grad }^* \mathbf{v}^* \mathbf{v}^* \frac{\lambda_0^2}{L^3} + \text{grad }^* \pi_E^* \frac{\lambda_0^2}{L^3} - \frac{\eta_0}{\rho_0} \Delta^* \mathbf{v}^* \frac{\lambda_0}{L^3} = -\alpha_0 (\Delta \phi)_0 \phi^* \mathbf{g}. \quad (7.48)$$

Dividiendo por $\frac{\lambda_0^2}{L^3}$ se obtiene (7.35).

Veamos a continuación que, considerando las variables adimensionales dadas en (7.33), la ecuación de la energía citada en (7.32) toma la forma adimensional dada en (7.36).

Puesto que el coeficiente de conductividad térmica es constante y las fuentes de calor externas se consideran únicamente en las condiciones de contorno, la ecuación (7.32) se puede escribir como:

$$\rho_0 c_{\pi 0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{grad } \phi \cdot \mathbf{v} \right) - k_0 \Delta \phi = 0. \quad (7.49)$$

Teniendo en cuenta las semejanzas dadas en (7.33), se tiene trivialmente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} \cdot \frac{\lambda_0 (\Delta \phi)_0}{L^2}, \quad (7.50)$$

$$\text{grad } \phi = \text{grad }^* \phi^* \frac{(\Delta \phi)_0}{L}, \quad (7.51)$$

$$\Delta \phi = \Delta^* \phi^* \frac{(\Delta \phi)_0}{L^2}. \quad (7.52)$$

Dividiendo por $\rho_0 c_{\pi 0}$ la ecuaci3n (7.49) e introduciendo estas igualdades obtenemos:

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} \frac{\lambda_0(\Delta \phi)_0}{L^2} + \text{grad}^* \phi^* \cdot \mathbf{v} \frac{\lambda_0(\Delta \phi)_0}{L^2} - \Delta^* \phi^* \frac{k_0(\Delta \phi)_0}{\rho_0 c_{\pi 0} L^2} = 0. \quad (7.53)$$

Dividiendo por $\frac{\lambda_0(\Delta \phi)_0}{L^2}$ se obtiene la ecuaci3n (7.36).

7.4. Formulaci3n d3bil

En esta secci3n, en primer lugar, planteamos un problema adimensionalizado de valor inicial con condiciones de contorno. En segundo lugar obtenemos formulaciones d3biles de dicho problema.

En adelante, por comodidad de la notaci3n a pesar de cometer un abuso, omitiremos el super3ndice $*$. Consideramos un problema de valor inicial con condiciones de contorno en un dominio Ω . Suponemos que la temperatura y la velocidad son conocidas en el instante inicial

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x), \quad (7.54)$$

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x). \quad (7.55)$$

Adem3s imponemos la siguiente condici3n de contorno

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma,$$

para la ecuaci3n del movimiento, siendo Γ la frontera del dominio adimensionalizado, Ω . Para la ecuaci3n de la energ3a consideramos dos tipos de condiciones de contorno: dividimos la frontera Γ en dos partes disjuntas, Γ_D y Γ_N , y suponemos la temperatura dada en Γ_D mientras que en Γ_N suponemos conocido el flujo de calor. Es decir, imponemos

$$\phi = \phi_D \quad \text{en } \Gamma_D \times (0, t_f), \quad (7.56)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = g_N \quad \text{en } \Gamma_N \times (0, t_f), \quad (7.57)$$

donde \mathbf{n} es el vector normal unitario exterior a Γ_N y $\phi_D : \Gamma_D \times (0, t_f) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g_N : \Gamma_N \times (0, t_f) \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones escalares dadas.

Recordamos que $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ denota el subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ definido por

$$H_{\Gamma_D}^1(\Omega) = \{z \in H^1(\Omega) / z|_{\Gamma_D} = 0\}.$$

Introducimos tambi3n la siguiente notaci3n

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) = \{\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{w} = 0 \text{ en } \Gamma\}.$$

Entonces, multiplicando la ecuaci3n (7.35) por una funci3n test $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, integrando en Ω y aplicando la f3rmula usual de Green obtenemos una formulaci3n d3bil para la ecuaci3n del movimiento. An3logamente, multiplicando (7.34) por una funci3n test $q \in L^2(\Omega)$ e integrando en Ω obtenemos una formulaci3n d3bil para la ecuaci3n de incompresibilidad. Consideramos por tanto el siguiente problema

PM.— Encontrar $\mathbf{v}(\cdot, t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ y $\pi(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$ tales que

$$\int_{\Omega} \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w} \, dx + Pr \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{w} \, dx - \int_{\Omega} \pi_E \text{div } \mathbf{w} \, dx \quad (7.58)$$

$$= \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, dx, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad \forall t \in (0, t_f),$$

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v} q \, dx = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega), \quad \forall t \in (0, t_f), \quad (7.59)$$

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x) \text{ en } \Omega, \quad (7.60)$$

donde $\mathbf{b} = RaPr\phi(0, 1)$.

Para obtener una formulación débil del problema térmico a partir de la cual se obtengan métodos de características semi-Lagrangianos y Lagrangianos procedemos de forma análoga al Apartado 1.3.2. En primer lugar, conviene recordar la siguiente notación

$$\phi_\tau(x, t) = \phi((X_e)_\tau(x, t), t) \quad \forall (x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, t_f],$$

donde $(X_e)_\tau$ se define en (1.12). Entonces, obtenemos la siguiente formulación débil del problema térmico²:

PE.— Encontrar una función $\phi_\tau(\cdot, t) \in H^1(\Omega)$ tal que $\phi_\tau(\cdot, t) = \phi_D(\cdot, t)$ en Γ_D y

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \phi_\tau \det F_\tau z \, dx + \int_{\Omega} F_\tau^{-1} F_\tau^{-T} \text{grad } \phi_\tau \cdot \text{grad } z \det F_\tau \, dx = \int_{\Gamma_N} |F_\tau^{-T} \mathbf{m}| \det F_\tau (g_N)_\tau z \, d\Gamma, \quad (7.61)$$

$$\begin{aligned} \forall z \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega), \forall t \in (0, t_f), \\ \phi_\tau(x, 0) = \phi_0(P(x, \tau)), \end{aligned} \quad (7.62)$$

siendo F_τ el jacobiano de la transformación $(X_e)_\tau$. Nótese que en este caso estamos considerando un fluido incompresible, y entonces $\det F_\tau = 1$. Sin embargo, en la práctica se desconoce la expresión analítica de la velocidad; y en general la velocidad numérica no verifica dicha propiedad. Por tanto, mantenemos en la ecuación de la energía los determinantes de la transformación y se calcularán numéricamente.

A continuación consideramos una nueva formulación débil para el problema térmico a partir de la cual se obtiene el método PSI. Multiplicando la ecuación de la energía (7.36) por una función test $z \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$, integrando en Ω , aplicando la fórmula usual de Green en la parte correspondiente al término de difusión y teniendo en cuenta la condición de contorno (7.57) obtenemos la siguiente formulación débil del problema térmico:

PE.— Encontrar una función $\phi(\cdot, t) \in H^1(\Omega)$ tal que $\phi(\cdot, t) = \phi_D(\cdot, t)$ en Γ_D y

$$\int_{\Omega} (\phi' + \text{grad } \phi \cdot \mathbf{v}) z \, dx + \int_{\Omega} \text{grad } \phi \cdot \text{grad } z \, dx = \int_{\Gamma_N} g_N z \, d\Gamma, \quad (7.63)$$

$$\begin{aligned} \forall z \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega), \forall t \in (0, t_f), \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x), \end{aligned} \quad (7.64)$$

Nótese que, bajo cierta elección del parámetro τ y del instante de tiempo t , se puede utilizar la formulación débil **PE** para introducir el método PSI, sin embargo resulta más natural considerar la formulación variacional **PE**.

El problema fluidodinámico y el problema térmico están acoplados.

²Estamos considerando un problema con velocidad nula en la frontera, por tanto $\Omega_\tau := X_e(\Omega, \tau) = \Omega$ y $X_e(x, \tau) = x$ para todo $x \in \Gamma$ y para todo τ .

Capítulo 8

Resolución Numérica

8.1. Introducción

Puesto que uno de los objetivos de este trabajo es el estudio de la evolución de un fluido para tiempos grandes, se incorporan métodos de características de orden dos para la discretización de los términos convectivos y el método PSI combinado con una discretización temporal de orden dos. Con ello se pretende obtener esquemas que permitan considerar pasos de tiempo mayores con objeto de acortar el tiempo de cálculo necesario para la simulación.

En este capítulo en primer lugar se propone una discretización espacial utilizando un método de elementos finitos.

En segundo lugar, presentamos dos estrategias diferentes para la discretización temporal: métodos de características y el método PSI. Para el problema térmico proponemos diferentes métodos de características. Concretamente, utilizamos el método de características enteramente Lagrangiano que estudiamos en la primera parte de este trabajo y algunos de los métodos semi-Lagrangianos que introducimos en la Sección 1.4.

Por último, con objeto de comprobar las capacidades reales y la fiabilidad de las herramientas informáticas desarrolladas resolvemos un problema bidimensional de convección natural en una cavidad cuadrada donde las paredes verticales se encuentran a distintas temperaturas. Los resultados obtenidos se comparan con los que aparecen en la literatura.

8.2. Discretización espacial: método de elementos finitos

En esta sección proponemos una discretización espacial de los problemas **PM**, **PE** y $\widetilde{\mathbf{PE}}$ utilizando elementos finitos (elementos finitos cuadráticos para el problema térmico y \mathbb{P}_1 +burbuja para el problema fluidodinámico).

Suponemos que Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^2 con frontera polygonal. Consideramos dos familias regulares de triangulaciones que denotamos por $(\mathcal{T}_h^M)_h$ para el problema fluidodinámico y $(\mathcal{T}_h^E)_h$ para el problema térmico, formadas por elementos T de diámetros $\leq h$ verificando las siguientes propiedades, para cada $h > 0$:

$$i) \quad \overline{\Omega} = \bigcup \{T : T \in \mathcal{T}_h^M\} = \bigcup \{T : T \in \mathcal{T}_h^E\}.$$

$$ii) \quad \text{Dados } T_1 \text{ y } T_2 \text{ dos elementos distintos de las mallas, se verifica que } \overset{\circ}{T}_1 \cap \overset{\circ}{T}_2 = \emptyset.$$

$$iii) \quad \text{Toda arista de cualquier elemento } T \in \mathcal{T}_h^E \text{ pertenece a } \Gamma_D \text{ o a } \Gamma_N \text{ o bien es una arista de otro elemento } T' \in \mathcal{T}_h^E.$$

Definimos los siguientes espacios de polinomios

$$\begin{aligned} P_2(T) &= \{q|_T : q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ polinomio de grado } \leq 2\}, \\ P_1(T) &= \{q|_T : q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ polinomio de grado } \leq 1\}, \\ P_b(T) &= \{q + \alpha \lambda_4^T : q \in P_1(T), \alpha \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

siendo $\lambda_4^T = 27 \prod_{i=1}^3 \lambda_i^T$ la función burbuja asociada al elemento T , donde $\{\lambda_1^T, \lambda_2^T, \lambda_3^T\}$ denotan las coordenadas baricéntricas respecto a los vértices del elemento T .

Consideramos los siguientes espacios de elementos finitos:

$$X_h = \left\{ \mathbf{w}_h \in \mathbf{C}^0(\overline{\Omega}) : \mathbf{w}_{h|T} \in P_b(T)^2, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^M \right\}, \quad (8.1)$$

$$X_{0h} = \left\{ \mathbf{w}_h \in X_h : \mathbf{w}_h = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma \right\}, \quad (8.2)$$

$$Y_h^1 = \left\{ \varphi_h \in C^0(\overline{\Omega}) : \varphi_{h|T} \in P_1(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^M \right\}, \quad (8.3)$$

$$Y_h^2 = \left\{ \varphi_h \in C^0(\overline{\Omega}) : \varphi_{h|T} \in P_2(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^E \right\}, \quad (8.4)$$

$$Y_{0h}^2 = \left\{ \varphi_h \in Y_h^2 : \varphi_h = 0 \text{ en } \Gamma_D \right\}. \quad (8.5)$$

Utilizamos la siguiente notación:

$a_i^M, i = 1, \dots, N^M$, son los vértices de la malla \mathcal{T}_h^M ,

$a_i^E, i = 1, \dots, N^E$, son los nodos (vértices y puntos medios de los lados) de la malla \mathcal{T}_h^E ,

$b_k^M, k = 1, \dots, N_t^M$, son los baricentros de la malla \mathcal{T}_h^M ,

Definimos el operador de interpolación Π_h^b como

$$\begin{cases} \forall \mathbf{w} \in \mathbf{C}^0(\overline{\Omega}), \quad \Pi_h^b(\mathbf{w}) \in X_h, \\ (\Pi_h^b(\mathbf{w}))(a_i^M) = \mathbf{w}(a_i^M) \text{ para todo vértice } a_i^M \text{ de } \mathcal{T}_h^M, \\ (\Pi_h^b(\mathbf{w}))(b_k^M) = \mathbf{w}(b_k^M) \text{ para todo baricentro } b_k^M \text{ de } \mathcal{T}_h^M. \end{cases}$$

Definimos también el operador de interpolación Π_h^2 como

$$\begin{cases} \forall w \in C^0(\overline{\Omega}), \quad \Pi_h^2(w) \in Y_h^2, \\ (\Pi_h^2(w))(a_i^E) = w(a_i^E) \text{ para todo nodo } a_i^E \text{ de } \mathcal{T}_h^E. \end{cases}$$

Análogamente consideramos el operador de interpolación Π_{h,Γ_D}^2 , definido para funciones continuas sobre Γ_D . Nótese que $\Pi_{h,\Gamma_D}^2(w)$ está unívocamente determinada por los valores de w en los nodos de la malla \mathcal{T}_h^E que pertenecen a Γ_D .

Para la discretización espacial del problema **PM** (respectivamente, **PE** y $\widetilde{\mathbf{PE}}$) aproximamos los espacios $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$ (respectivamente, $H^1(\Omega)$ y $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$) por los espacios de elementos finitos dados en (8.2) y (8.3) (respectivamente, (8.4) y (8.5)).

De este modo, obtenemos los siguientes problemas semidiscretizados:

PM_h.— Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_h(\cdot, t) \in X_{0h}$ y $\pi_{E,h}(\cdot, t) \in Y_h^1$ tales que

$$\int_{\Omega} \dot{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{w}_h dx + Pr \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{v}_h \cdot \text{grad } \mathbf{w}_h dx - \int_{\Omega} \pi_{E,h} \text{div } \mathbf{w}_h dx \quad (8.6)$$

$$= RaPr \int_{\Omega} (0, \phi_h) \cdot \mathbf{w}_h dx, \quad \forall \mathbf{w}_h \in X_{0h}, \quad \forall t \in (0, t_f),$$

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v}_h q_h dx = 0, \quad \forall q_h \in Y_h^1, \quad \forall t \in (0, t_f), \quad (8.7)$$

con

$$\mathbf{v}_h(\cdot, 0) = \Pi_h^b(\mathbf{v}_0). \quad (8.8)$$

PE_h.— Encontrar una función $\phi_{\tau,h}(\cdot, t) \in Y_h^2$ tal que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{\tau,h} \det F_{\tau} z_h dx + \int_{\Omega} F_{\tau}^{-1} F_{\tau}^{-T} \text{grad } \phi_{\tau,h} \cdot \text{grad } z_h \det F_{\tau} dx$$

$$= \int_{\Gamma_N} |F_{\tau}^{-T} \mathbf{m}| \det F_{\tau} (g_N)_{\tau} z_h d\Gamma, \quad \forall z_h \in Y_{0h}^2, \quad \forall t \in (0, t_f), \quad (8.9)$$

sujeta a la condición de contorno

$$\phi_{\tau,h}(\cdot, t)|_{\Gamma_D} = \Pi_{h,\Gamma_D}^2(\phi_D(\cdot, t)), \quad (8.10)$$

para cada $t \in [0, t_f]$, y a la condición inicial

$$\phi_{\tau,h}(\cdot, 0) = \Pi_h^2(\phi_0 \circ P(\cdot, \tau)). \quad (8.11)$$

$\widetilde{\mathbf{PE}}_h$.— Encontrar una función $\phi_h(\cdot, t) \in Y_h^2$ tal que

$$\int_{\Omega} (\phi'_h + \text{grad } \phi_h \cdot \mathbf{v}) z_h dx + \int_{\Omega} \text{grad } \phi_h \cdot \text{grad } z_h dx$$

$$= \int_{\Gamma_N} g_N z_h d\Gamma, \quad \forall z_h \in Y_{0h}^2, \quad \forall t \in (0, t_f), \quad (8.12)$$

sujeta a la condición de contorno

$$\phi_h(\cdot, t)|_{\Gamma_D} = \Pi_{h,\Gamma_D}^2(\phi_D(\cdot, t)), \quad (8.13)$$

para cada $t \in [0, t_f]$, y a la condición inicial

$$\phi_h(\cdot, 0) = \Pi_h^2(\phi_0). \quad (8.14)$$

Recordemos que para obtener distintos métodos de características del problema térmico utilizaremos el problema semidiscretizado **PE_h**, sin embargo para obtener el método PSI usaremos la formulación $\widetilde{\mathbf{PE}}_h$.

Nótese que los grados de libertad relativos a las burbujas se podrán obtener como combinaciones lineales de los grados de libertad de la velocidad y la presión en los vértices del mallado \mathcal{T}_h^D (ver [14]).

8.3. Discretización temporal

En esta sección introducimos diferentes discretizaciones temporales de los problemas \mathbf{PE}_h , $\widetilde{\mathbf{PE}}_h$ y \mathbf{PM}_h . Concretamente proponemos métodos de características y el método PSI. Para resolver el problema \mathbf{PE}_h utilizamos tres métodos diferentes de características : el método de segundo orden de dos pasos semi-Lagrangiano dado en (1.66); el método Lagrangiano que estudiamos en la primera parte de este trabajo; y el análogo pero reiniciando la transformación a la identidad en cada paso de tiempo de la discretización (método dado en (1.64)).

8.3.1. Método de características semi-Lagrangiano I

El método de características que presentamos en este apartado se propone y analiza en [40] para las ecuaciones de convección-difusión unidimensionales, y en [22] para las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles.

En primer lugar, será conveniente recordar la notación introducida en el Capítulo 1 relativa a las trayectorias del movimiento. Concretamente, dado $\tau \in [0, t_f]$ se define el movimiento relativo a la configuración en tiempo τ como la aplicación

$$(X_e)_\tau : \overline{\Omega} \times [0, t_f] \longrightarrow \mathcal{E},$$

definida por

$$(X_e)_\tau(y, t) := X_e(P(y, \tau), t). \quad (8.15)$$

Por lo tanto, $(X_e)_\tau(y, \cdot)$ representa la trayectoria descrita por un punto material que ocupa en el instante τ la posición y . Empleando esta notación se obtiene una expresión alternativa para la derivada material de un campo espacial φ en un punto (x, t) :

$$\dot{\varphi}(x, t) = \frac{d}{ds} \varphi((X_e)_t(x, s), s)|_{s=t}.$$

Aproximamos la derivada material de las ecuaciones (8.6) y (8.9) utilizando la siguiente fórmula de tres puntos

$$y'(t_{n+1}) = \frac{3y(t_{n+1}) - 4y(t_n) + y(t_{n-1}))}{2\Delta t} + O(\Delta t^2), \quad (8.16)$$

para $n \geq 1$ y, para $n = 0$, la fórmula de Euler de primer orden

$$y'(t_1) = \frac{y(t_1) - y(t_0)}{\Delta t} + O(\Delta t). \quad (8.17)$$

La fórmula de segundo orden (8.16) se utiliza también en [22], [40] y [43].

Entonces, evaluando las ecuaciones (8.6) y (8.9) en $t = t_{n+1}$, tomando $\tau = t_{n+1}$, y aproximando las derivadas materiales por la fórmula (8.16) (respectivamente, (8.17)) para $n \geq 1$ (respectivamente, $n = 0$), obtenemos los siguientes problemas totalmente discretizados

Para $n = 0$:

PMD _{h} ¹.— Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 \in X_{0h}$ y $\pi_{E,h,\Delta t}^1 \in Y_h^1$ tales que

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 \cdot \mathbf{w}_h dx + Pr \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 \cdot \text{grad } \mathbf{w}_h dx \quad (8.18)$$

$$- \int_{\Omega} \pi_{E,h,\Delta t}^1 \text{div } \mathbf{w}_h dx = RaPr \int_{\Omega} (0, \phi_{h,\Delta t}^1) \cdot \mathbf{w}_h dx + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\mathbf{v}_{h,\Delta t}^0 \circ (X_e)_1^0) \cdot \mathbf{w}_h dx, \quad \forall \mathbf{w}_h \in X_{0h},$$

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 q_h dx = 0, \quad \forall q_h \in Y_h^1, \quad (8.19)$$

con

$$\mathbf{v}_{h,\Delta t}^0 = \Pi_h^b(\mathbf{v}_0). \quad (8.20)$$

Para $n \geq 1$:

PMD _{h} ^{$n+1$} .— Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} \in X_{0h}$ y $\pi_{E,h,\Delta t}^{n+1} \in Y_h^1$ tales que

$$\frac{3}{2\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} \cdot \mathbf{w}_h dx + Pr \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} \cdot \text{grad } \mathbf{w}_h dx \quad (8.21)$$

$$- \int_{\Omega} \pi_{E,h,\Delta t}^{n+1} \text{div } \mathbf{w}_h dx = RaPr \int_{\Omega} (0, \phi_{h,\Delta t}^{n+1}) \cdot \mathbf{w}_h dx + \frac{2}{\Delta t} \int_{\Omega} (\mathbf{v}_{h,\Delta t}^n \circ (X_e)_{n+1}^n) \cdot \mathbf{w}_h dx$$

$$- \frac{1}{2\Delta t} \int_{\Omega} (\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n-1} \circ (X_e)_{n+1}^{n-1}) \cdot \mathbf{w}_h dx, \quad \forall \mathbf{w}_h \in X_{0h},$$

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} q dx = 0, \quad \forall q_h \in Y_h^1. \quad (8.22)$$

Para $n = 0$:

PED _{h} ¹.— Encontrar una función $\phi_{h,\Delta t}^1 \in Y_h^2$ tal que

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi_{h,\Delta t}^1 z_h dx + \int_{\Omega} \text{grad } \phi_{h,\Delta t}^1 \cdot \text{grad } z_h dx = \int_{\Gamma_N} g_N^1 z_h d\Gamma \quad (8.23)$$

$$+ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\phi_{h,\Delta t}^0 \circ (X_e)_1^0) z_h dx, \quad \forall z_h \in Y_{0h}^2,$$

donde

$$\phi_{h,\Delta t}^0 = \Pi_h^2(\phi_0), \quad (8.24)$$

$$\phi_h^1|_{\Gamma_D} = \Pi_{h,\Gamma_D}^2(\phi_D^1). \quad (8.25)$$

Para $n \geq 1$:

PED $_h^{n+1}$.— Encontrar una función $\phi_{h,\Delta t}^{n+1} \in Y_h^2$ tal que

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2\Delta t} \int_{\Omega} \phi_{h,\Delta t}^{n+1} z_h dx + \int_{\Omega} \text{grad } \phi_{h,\Delta t}^{n+1} \cdot \text{grad } z_h dx = \int_{\Gamma_N} g_N^{n+1} z_h d\Gamma \\ & + \frac{2}{\Delta t} \int_{\Omega} (\phi_{h,\Delta t}^n \circ (X_e)_{n+1}^n) z_h dx - \frac{1}{2\Delta t} \int_{\Omega} (\phi_{h,\Delta t}^{n-1} \circ (X_e)_{n+1}^{n-1}) z_h dx, \quad \forall z_h \in Y_{0h}^2, \end{aligned} \quad (8.26)$$

donde

$$\phi_h^{n+1}|_{\Gamma_D} = \Pi_{h,\Gamma_D}^2(\phi_D^{n+1}). \quad (8.27)$$

En las ecuaciones utilizamos la siguiente notación abreviada

$$(X_e)_j^l = (X_e)_{t_j}(\cdot, t_l) \quad \forall j, l \in \{0, \dots, N\}.$$

Nótese que en la práctica las curvas características se aproximan utilizando fórmulas numéricas, concretamente proponemos las siguientes aproximaciones (ver [22]):

- Para **PMD** $_h^1$: Fórmula de primer orden

$$(X_e)_1^0(x) \sim (X_a)_1^0(x) := x - \Delta t \mathbf{v}_{h,\Delta t}^0(x). \quad (8.28)$$

- Para **PED** $_h^1$: Fórmula de dos pasos

$$(X_e)_1^0(x) \sim (X_a)_1^0(x) := x - \Delta t (2\mathbf{v}_{h,\Delta t}^1(x) - \mathbf{v}_{h,\Delta t}^0(x)). \quad (8.29)$$

- Para $n \geq 1$: Fórmula de dos pasos de segundo orden

$$(X_e)_{n+1}^n(x) \sim (X_a)_{n+1}^n(x) := x - \left(2\mathbf{v}_{h,\Delta t}^n(x) - \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n-1}(x)\right)(t_{n+1} - t_n), \quad (8.30)$$

$$(X_e)_{n+1}^{n-1}(x) \sim (X_a)_{n+1}^{n-1}(x) := x - \left(2\mathbf{v}_{h,\Delta t}^n(x) - \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n-1}(x)\right)(t_{n+1} - t_{n-1}). \quad (8.31)$$

En la práctica, resolvemos por separado la parte fluidodinámica de la parte térmica, a pesar de que ambas partes están acopladas. Concretamente, procedemos de la siguiente manera:

- Para $n = 0$:
 - En primer lugar resolvemos el problema **PMD** $_h^1$ a partir de $\phi_{h,\Delta t}^0$ y $\mathbf{v}_{h,\Delta t}^0$.
 - A continuación calculamos $\phi_{h,\Delta t}^1$, solución del problema **PED** $_h^1$, a partir de $\phi_{h,\Delta t}^0$, y utilizando para calcular las características $\mathbf{v}_{h,\Delta t}^1$ y $\mathbf{v}_{h,\Delta t}^0$.
- Para $n \geq 1$:
 - En primer lugar calculamos $\phi_{h,\Delta t}^{n+1}$, solución del problema **PED** $_h^{n+1}$, a partir de $\phi_{h,\Delta t}^n$, $\phi_{h,\Delta t}^{n-1}$ y utilizando $\mathbf{v}_{h,\Delta t}^n$ y $\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n-1}$ para mover los puntos por las características.
 - A continuación resolvemos el problema **PMD** $_h^{n+1}$, a partir de $\mathbf{v}_{h,\Delta t}^n$, $\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n-1}$ y $\phi_{h,\Delta t}^{n+1}$.

Concretamente se resuelven los siguientes problemas totalmente discretizados, donde la parte térmica y la fluidodinámica están desacopladas.

Para $n = 0$:

1. **PMD** _{h} ¹.— Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 \in X_{0h}$ y $\pi_{E,h,\Delta t}^1 \in Y_h^1$ tales que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 \cdot \mathbf{w}_h \, dx + Pr \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 \cdot \text{grad } \mathbf{w}_h \, dx \\ & - \int_{\Omega} \pi_{E,h,\Delta t}^1 \text{div } \mathbf{w}_h \, dx = RaPr \int_{\Omega} (0, \phi_{h,\Delta t}^0) \cdot \mathbf{w}_h \, dx + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\mathbf{v}_{h,\Delta t}^0 \circ (X_a)_1^0) \cdot \mathbf{w}_h \, dx, \quad \forall \mathbf{w}_h \in X_{0h}, \\ & \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 q_h \, dx = 0, \quad \forall q_h \in Y_h^1, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^0 &= \Pi_h^b(\mathbf{v}_0), \\ \phi_{h,\Delta t}^0 &= \Pi_h^2(\phi_0). \end{aligned}$$

2. **PED** _{h} ¹.— Encontrar una función $\phi_{h,\Delta t}^1 \in Y_h^2$ tal que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi_{h,\Delta t}^1 z_h \, dx + \int_{\Omega} \text{grad } \phi_{h,\Delta t}^1 \cdot \text{grad } z_h \, dx = \int_{\Gamma_N} g_N^1 z_h \, d\Gamma \\ & + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\phi_{h,\Delta t}^0 \circ (X_a)_1^0) z_h \, dx, \quad \forall z_h \in Y_{0h}^2, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_{h,\Delta t}^0 &= \Pi_h^2(\phi_0), \\ \phi_h^1|_{\Gamma_D} &= \Pi_{h,\Gamma_D}^2(\phi_D^1). \end{aligned}$$

Para $n \geq 1$:

1. **PED** _{h} ^{$n+1$} .— Encontrar una función $\phi_{h,\Delta t}^{n+1} \in Y_h^2$ tal que

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2\Delta t} \int_{\Omega} \phi_{h,\Delta t}^{n+1} z_h \, dx + \int_{\Omega} \text{grad } \phi_{h,\Delta t}^{n+1} \cdot \text{grad } z_h \, dx = \int_{\Gamma_N} g_N^{n+1} z_h \, d\Gamma \\ & + \frac{2}{\Delta t} \int_{\Omega} (\phi_{h,\Delta t}^n \circ (X_a)_{n+1}^n) z_h \, dx - \frac{1}{2\Delta t} \int_{\Omega} (\phi_{h,\Delta t}^{n-1} \circ (X_a)_{n+1}^{n-1}) z_h \, dx, \quad \forall z_h \in Y_{0h}^2, \end{aligned}$$

donde

$$\phi_{h,\Delta t}^{n+1}|_{\Gamma_D} = \Pi_{h,\Gamma_D}^2(\phi_D^{n+1}).$$

2. **PMD** _{h} ^{$n+1$} .— Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} \in X_{0h}$ y $\pi_{E,h,\Delta t}^{n+1} \in Y_h^1$ tales que

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} \cdot \mathbf{w}_h \, dx + Pr \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} \cdot \text{grad } \mathbf{w}_h \, dx \\ & - \int_{\Omega} \pi_{E,h,\Delta t}^{n+1} \text{div } \mathbf{w}_h \, dx = RaPr \int_{\Omega} (0, \phi_{h,\Delta t}^{n+1}) \cdot \mathbf{w}_h \, dx + \frac{2}{\Delta t} \int_{\Omega} (\mathbf{v}_{h,\Delta t}^n \circ (X_a)_{n+1}^n) \cdot \mathbf{w}_h \, dx \\ & - \frac{1}{2\Delta t} \int_{\Omega} (\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n-1} \circ (X_a)_{n+1}^{n-1}) \cdot \mathbf{w}_h \, dx, \quad \forall \mathbf{w}_h \in X_{0h}, \\ & \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} q \, dx = 0, \quad \forall q_h \in Y_h^1. \end{aligned}$$

Observación 8.3.1. Como consecuencia de la integración numérica, en la práctica será suficiente mover ciertos nodos de cuadratura a_i , $i = 1, \dots, n_{\text{nod}}$. Además, de las expresiones para las trayectorias aproximadas, (8.28)-(8.31), se deduce que posiblemente algunos nodos de cuadratura caigan fuera del dominio computacional. En este caso, utilizamos un desarrollo de Taylor de primer orden para aproximar $(\phi_{h,\Delta t}^l \circ (X_a)_j^l)(a_i)$ y $(\mathbf{v}_{h,\Delta t}^l \circ (X_a)_j^l)(a_i)$, es decir:

$$\begin{aligned}\phi_{h,\Delta t}^l((X_a)_j^l(a_i)) &\simeq \phi_{h,\Delta t}^l(a_i) + \text{grad } \phi_{h,\Delta t}^l(a_i) \cdot ((X_a)_j^l(a_i) - a_i), \\ \mathbf{v}_{h,\Delta t}^l((X_a)_j^l(a_i)) &\simeq \mathbf{v}_{h,\Delta t}^l(a_i) + \text{grad } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^l(a_i) \cdot ((X_a)_j^l(a_i) - a_i).\end{aligned}$$

siendo $0 \leq l, j \leq N$.

8.3.2. Método de características semi-Lagrangiano II

En este apartado utilizamos para la discretización del problema \mathbf{PM}_h el método de características semi-Lagrangiano presentado en el Apartado 8.3.1. Sin embargo, para la discretización temporal del problema térmico, \mathbf{PE}_h , proponemos el método semi-Lagrangiano (1.64). Concretamente, dicho método es análogo al método Lagrangiano que estudiamos en la primera parte de este trabajo; se obtiene reinicializando la transformación a la identidad en cada paso de tiempo de la discretización.

En primer lugar, conviene recordar la siguiente notación

$$\phi_j^l(y) = \phi_{t_j}(y, t_l) \quad 0 \leq j, l \leq N.$$

Aproximamos la derivada material de la ecuación (8.9) por la siguiente fórmula centrada de segundo orden

$$y'(t_{n+\frac{1}{2}}) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{\Delta t} + O(\Delta t^2). \quad (8.32)$$

Entonces, evaluando la ecuación (8.9) en $t_{n+\frac{1}{2}}$, tomando $\tau = t_n$, aproximando la derivada material por la fórmula centrada (8.32) y los demás términos por una combinación lineal convexa en la que intervienen los tiempos t_n y t_{n+1} , obtenemos el siguiente problema totalmente discretizado

Para $n = 0$:

PED_h¹.— Encontrar una función $\phi_{0,h,\Delta t}^1 \in Y_h^2$ tal que

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\theta \det F_0^1 + (1 - \theta)) \phi_{0,h,\Delta t}^1 z_h dx + \theta^2 \int_{\Omega} (F_0^1)^{-1} (F_0^1)^{-T} \det F_0^1 \text{grad } \phi_{0,h,\Delta t}^1 \cdot \text{grad } z_h dx \\& \quad + (1 - \theta) \theta \int_{\Omega} \text{grad } \phi_{0,h,\Delta t}^1 \cdot \text{grad } z_h dx \\& = \int_{\Gamma_N} (\theta |(F_0^1)^{-T} \mathbf{m}| \det F_0^1 g_N^1 \circ (X_e)_0^1 + (1 - \theta) g_N^0) z_h d\Gamma + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\theta \det F_0^1 + (1 - \theta)) \phi_{h,\Delta t}^0 z_h dx, \\& \quad - (1 - \theta) \theta \int_{\Omega} (F_0^1)^{-1} (F_0^1)^{-T} \det F_0^1 \text{grad } \phi_{h,\Delta t}^0 \cdot \text{grad } z_h dx \\& \quad - (1 - \theta)^2 \int_{\Omega} \text{grad } \phi_{h,\Delta t}^0 \cdot \text{grad } z_h dx \quad \forall z_h \in Y_{0h}^2, \quad (8.33)\end{aligned}$$

donde

$$\phi_{h,\Delta t}^0 = \Pi_h^2(\phi_0), \quad (8.34)$$

$$\phi_{0,h,\Delta t}^1|_{\Gamma_D} = \Pi_{h,\Gamma_D}^2(\phi_D^1). \quad (8.35)$$

Para $n \geq 1$:

PED $_h^{n+1}$.— Encontrar una función $\phi_{n,h,\Delta t}^{n+1} \in Y_h^2$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\theta \det F_n^{n+1} + (1-\theta)) \phi_{n,h,\Delta t}^{n+1} z_h dx + \theta^2 \int_{\Omega} (F_n^{n+1})^{-1} (F_n^{n+1})^{-T} \det F_n^{n+1} \text{grad } \phi_{n,h,\Delta t}^{n+1} \cdot \text{grad } z_h dx \\ + (1-\theta) \theta \int_{\Omega} \text{grad } \phi_{n,h,\Delta t}^{n+1} \cdot \text{grad } z_h dx = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\theta \det F_n^{n+1} + (1-\theta)) (\phi_{n-1,h,\Delta t}^n \circ (X_e)_n^{n-1}) z_h dx \\ + \int_{\Gamma_N} (\theta |(F_n^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_n^{n+1} g_N^{n+1} \circ (X_e)_n^{n+1} + (1-\theta) g_N^n) z_h d\Gamma \\ - (1-\theta) \theta \int_{\Omega} (F_n^{n+1})^{-1} (F_n^{n+1})^{-T} \det F_n^{n+1} (F_n^{n-1})^T [(\text{grad } \phi_{n-1,h,\Delta t}^n \circ (X_e)_n^{n-1}) \cdot \text{grad } z_h dx \\ - (1-\theta)^2 \int_{\Omega} (F_n^{n-1})^T [(\text{grad } \phi_{n-1,h,\Delta t}^n \circ (X_e)_n^{n-1}) \cdot \text{grad } z_h dx \forall z_h \in Y_{0h}^2, \end{aligned} \quad (8.36)$$

con

$$\phi_{n,h,\Delta t}^{n+1}|_{\Gamma_D} = \Pi_{h,\Gamma_D}^2(\phi_D^{n+1}). \quad (8.37)$$

En las ecuaciones de arriba $\phi_{n-1,h,\Delta t}^n$ denota una aproximación de ϕ_{n-1}^n . A partir de esta aproximación se construye la correspondiente aproximación de $\phi(x, t_n)$, concretamente:

$$\phi(x, t_n) = \phi_{n-1}^n((X_e)_n^{n-1}(x)) \sim \phi_{h,\Delta t}^n := \phi_{n-1,h,\Delta t}^n((X_e)_n^{n-1}(x)).$$

En la ecuación (8.36) se introduce esta aproximación y también la siguiente

$$\text{grad } \phi(x, t_n) = (F_n^{n-1})^T(x) (\text{grad } \phi_{n-1}^n)((X_e)_n^{n-1}(x)) \sim (F_n^{n-1})^T(x) (\text{grad } \phi_{n-1,h,\Delta t}^n)((X_e)_n^{n-1}(x))$$

Para aproximar las curvas características y sus gradientes utilizamos las siguientes fórmulas numéricas basadas en el método de Runge-Kutta de segundo orden que empleamos en (1.106) (para el problema fluidodinámico utilizamos las aproximaciones dadas en el Apartado 8.3.1)

$$\begin{aligned} (X_e)_m^{m-1}(x) &\sim (X_a)_m^{m-1}(x) := x - \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{v}_{h,\Delta t}^m \left(x - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^m(x) \right) + \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{m-1} \left(x - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^m(x) \right) \right), \\ (X_e)_{m-1}^m(x) &\sim (X_a)_{m-1}^m(x) := x + \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{v}_{h,\Delta t}^m \left(x + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{m-1}(x) \right) + \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{m-1} \left(x + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{m-1}(x) \right) \right), \\ F_m^{m-1}(x) &\sim (F_a)_m^{m-1}(x) := \text{grad } (X_a)_m^{m-1}(x) = I - \frac{\Delta t}{2} \left(L_{h,\Delta t}^m \left(x - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^m(x) \right) \right. \\ &\quad \left. + L_{h,\Delta t}^{m-1} \left(x - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^m(x) \right) \right) \left(I - \frac{\Delta t}{2} L_{h,\Delta t}^m(x) \right), \\ F_{m-1}^m(x) &\sim (F_a)_{m-1}^m := \text{grad } (X_a)_{m-1}^m(x) := I + \frac{\Delta t}{2} \left(L_{h,\Delta t}^m \left(x + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{m-1}(x) \right) \right. \\ &\quad \left. + L_{h,\Delta t}^{m-1} \left(x + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{m-1}(x) \right) \right) \left(I + \frac{\Delta t}{2} L_{h,\Delta t}^{m-1}(x) \right), \end{aligned}$$

donde $L_{h,\Delta t}^l = \text{grad } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^l$, $0 \leq l \leq N$, y $1 \leq m \leq N$. En la práctica, resolvemos por separado la parte fluidodinámica de la parte térmica, en primer lugar se resuelve el problema fluidodinámico y posteriormente el problema térmico. Concretamente, se resuelven los siguientes problemas totalmente discretizados, donde la parte térmica y la fluidodinámica están desacopladas.

Para $n = 0$:

1. **PMD** $_h^1$.— Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 \in X_{0h}$ y $\pi_{E,h,\Delta t}^1 \in Y_h^1$ tales que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 \cdot \mathbf{w}_h dx + Pr \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 \cdot \text{grad } \mathbf{w}_h dx \\ & - \int_{\Omega} \pi_{E,h,\Delta t}^1 \text{div } \mathbf{w}_h dx = RaPr \int_{\Omega} (0, \phi_{h,\Delta t}^0) \cdot \mathbf{w}_h dx + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\mathbf{v}_{h,\Delta t}^0 \circ (X_a)_1^0) \cdot \mathbf{w}_h dx, \quad \forall \mathbf{w}_h \in X_{0h}, \\ & \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 q_h dx = 0, \quad \forall q_h \in Y_h^1, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^0 &= \Pi_h^b(\mathbf{v}_0), \\ \phi_{h,\Delta t}^0 &= \Pi_h^2(\phi_0). \end{aligned}$$

2. **PED** $_h^1$.— Encontrar una función $\phi_{0,h,\Delta t}^1 \in Y_h^2$ tal que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\theta \det (F_a)_0^1 + (1 - \theta)) \phi_{0,h,\Delta t}^1 z_h dx \\ & + \theta^2 \int_{\Omega} ((F_a)_0^1)^{-1} ((F_a)_0^1)^{-T} \det (F_a)_0^1 \text{grad } \phi_{0,h,\Delta t}^1 \cdot \text{grad } z_h dx \\ & + (1 - \theta) \theta \int_{\Omega} \text{grad } \phi_{0,h,\Delta t}^1 \cdot \text{grad } z_h dx = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\theta \det (F_a)_0^1 + (1 - \theta)) \phi_{h,\Delta t}^0 z_h dx \\ & + \int_{\Gamma_N} (\theta |((F_a)_0^1)^{-T} \mathbf{m}| \det (F_a)_0^1 g_N^1 \circ (X_a)_0^1 + (1 - \theta) g_N^0) z_h d\Gamma \\ & - (1 - \theta) \theta \int_{\Omega} ((F_a)_0^1)^{-1} ((F_a)_0^1)^{-T} \det (F_a)_0^1 \text{grad } \phi_{h,\Delta t}^0 \cdot \text{grad } z_h dx \\ & - (1 - \theta)^2 \int_{\Omega} \text{grad } \phi_{h,\Delta t}^0 \cdot \text{grad } z_h dx \quad \forall z_h \in Y_{0h}^2, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_{h,\Delta t}^0 &= \Pi_h^2(\phi_0), \\ \phi_{0,h,\Delta t}^1|_{\Gamma_D} &= \Pi_{h,\Gamma_D}^2(\phi_D^1). \end{aligned}$$

Para $n \geq 1$:

1. **PMD** $_h^{n+1}$.— Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} \in X_{0h}$ y $\pi_{E,h,\Delta t}^{n+1} \in Y_h^1$ tales que

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} \cdot \mathbf{w}_h dx + Pr \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} \cdot \text{grad } \mathbf{w}_h dx \\ & - \int_{\Omega} \pi_{E,h,\Delta t}^{n+1} \text{div } \mathbf{w}_h dx = RaPr \int_{\Omega} (0, \phi_{h,\Delta t}^n) \cdot \mathbf{w}_h dx + \frac{2}{\Delta t} \int_{\Omega} (\mathbf{v}_{h,\Delta t}^n \circ (X_a)_{n+1}^n) \cdot \mathbf{w}_h dx \\ & - \frac{1}{2\Delta t} \int_{\Omega} (\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n-1} \circ (X_a)_{n+1}^{n-1}) \cdot \mathbf{w}_h dx, \quad \forall \mathbf{w}_h \in X_{0h}, \\ & \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} q dx = 0, \quad \forall q_h \in Y_h^1. \end{aligned}$$

2. **PED**_hⁿ⁺¹.— Encontrar una función $\phi_{n,h,\Delta t}^{n+1} \in Y_h^2$ tal que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\theta \det(F_a)_n^{n+1} + (1-\theta)) \phi_{n,h,\Delta t}^{n+1} z_h dx \\ & + \theta^2 \int_{\Omega} ((F_a)_n^{n+1})^{-1} ((F_a)_n^{n+1})^{-T} \det(F_a)_n^{n+1} \operatorname{grad} \phi_{n,h,\Delta t}^{n+1} \cdot \operatorname{grad} z_h dx \\ & + (1-\theta) \theta \int_{\Omega} \operatorname{grad} \phi_{n,h,\Delta t}^{n+1} \cdot \operatorname{grad} z_h dx = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\theta \det(F_a)_n^{n+1} + (1-\theta)) (\phi_{n-1,h,\Delta t}^n \circ (X_a)_n^{n-1}) z_h dx \\ & + \int_{\Gamma_N} (\theta |((F_a)_n^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det(F_a)_n^{n+1} g_N^{n+1} \circ (X_a)_n^{n+1} + (1-\theta) g_N^n) z_h d\Gamma \\ & - (1-\theta) \theta \int_{\Omega} ((F_a)_n^{n+1})^{-1} ((F_a)_n^{n+1})^{-T} \det(F_a)_n^{n+1} ((F_a)_n^{n-1})^T [(\operatorname{grad} \phi_{n-1,h,\Delta t}^n \circ (X_a)_n^{n-1}) \cdot \operatorname{grad} z_h] dx \\ & - (1-\theta)^2 \int_{\Omega} ((F_a)_n^{n-1})^T [(\operatorname{grad} \phi_{n-1,h,\Delta t}^n \circ (X_a)_n^{n-1}) \cdot \operatorname{grad} z_h] dx \quad \forall z_h \in Y_{0h}^2, \end{aligned}$$

donde

$$\phi_{n,h,\Delta t}^{n+1}|_{\Gamma_D} = \Pi_{h,\Gamma_D}^2(\phi_D^{n+1}).$$

8.3.3. Método de características Lagrangiano

En este apartado utilizamos para la discretización del problema **PM**_h el método de características semi-Lagrangiano presentado en el Apartado 8.3.1. Para la discretización temporal del problema térmico, **PE**_h, proponemos el método Lagrangiano que estudiamos en la primera parte de este trabajo. Entonces, evaluando la ecuación (8.9) en $t_{n+\frac{1}{2}}$, tomando $\tau = t_0 = 0$, aproximando la derivada material por la fórmula centrada (8.32) y los demás términos por una combinación lineal convexa en la que intervienen los tiempos t_n y t_{n+1} , obtenemos el siguiente problema totalmente discretizado

Para $n \geq 0$:

PED_hⁿ⁺¹.— Encontrar una función $\phi_{m,h,\Delta t}^{n+1} \in Y_h^2$ tal que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\theta \det F^{n+1} + (1-\theta) \det F^n) \phi_{m,h,\Delta t}^{n+1} z_h dp + \theta^2 \int_{\Omega} (F^{n+1})^{-1} (F^{n+1})^{-T} \det F^{n+1} \nabla \phi_{m,h,\Delta t}^{n+1} \cdot \nabla z_h dp \\ & + (1-\theta) \theta \int_{\Omega} (F^n)^{-1} (F^n)^{-T} \det F^n \nabla \phi_{m,h,\Delta t}^{n+1} \cdot \nabla z_h dp = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\theta \det F^{n+1} + (1-\theta) \det F^n) \phi_{m,h,\Delta t}^n z_h dp \\ & + \int_{\Gamma_N} (\theta |(F^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F^{n+1} g_N^{n+1} \circ X_e^{n+1} + (1-\theta) |(F^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F^n g_N^n \circ X_e^n) z_h d\Gamma \\ & - (1-\theta) \theta \int_{\Omega} (F^{n+1})^{-1} (F^{n+1})^{-T} \det F^{n+1} \nabla \phi_{m,h,\Delta t}^n \cdot \nabla z_h dp \\ & - (1-\theta)^2 \int_{\Omega} (F^n)^{-1} (F^n)^{-T} \det F^n \nabla \phi_{m,h,\Delta t}^n \cdot \nabla z_h dp \quad \forall z_h \in Y_{0h}^2, \end{aligned} \tag{8.38}$$

con

$$\phi_{m,h,\Delta t}^0 = \Pi_h^2(\phi_0), \tag{8.39}$$

$$\phi_{m,h,\Delta t}^{n+1}|_{\Gamma_D} = \Pi_{h,\Gamma_D}^2(\phi_D^{n+1}). \tag{8.40}$$

En la ecuación (8.38), $\phi_{m,h,\Delta t}^{n+1}$ denota una aproximación de ϕ_m^{n+1} . A partir de esta aproximación se construye la correspondiente aproximación de $\phi(x, t_{n+1})$, concretamente:

$$\phi(x, t_{n+1}) = \phi_m^{n+1}(P(x, t_{n+1})) \sim \phi_{h,\Delta t}^{n+1} := \phi_{m,h,\Delta t}^{n+1}(P(x, t_{n+1})).$$

Para aproximar las curvas características y sus gradientes utilizamos las siguientes fórmulas numéricas basadas en el método de Runge-Kutta de segundo orden que empleamos en (1.106) (para el problema fluidodinámico utilizamos las aproximaciones dadas en el Apartado 8.3.1)

- Cálculo de $X_a^{n+1}(p) \sim X_e(p, t_{n+1})$: En el instante inicial consideramos

$$X_a^0(p) := p \quad \forall p \in \overline{\Omega}, \quad (8.41)$$

y para cada $0 \leq n \leq N-1$, definimos por recurrencia

$$X_a^{n+1}(p) := X_a^n(p) + \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1}(Y^n(p)) + \mathbf{v}_{h,\Delta t}^n(Y^n(p)) \right) \quad \forall p \in \overline{\Omega}, \quad (8.42)$$

siendo

$$Y^n(p) := X_a^n(p) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^n(X_a^n(p)). \quad (8.43)$$

- Cálculo de $F_a^{n+1}(p) := \nabla X_a^{n+1}(p) \sim F(p, t_{n+1})$: En el instante inicial se tiene

$$F_a^0(p) = I, \quad (8.44)$$

y para cada $0 \leq n \leq N-1$, se verifica

$$\begin{aligned} F_a^{n+1}(p) &= F_a^n(p) \\ &+ \frac{\Delta t}{2} \left(L_{h,\Delta t}^{n+1}(Y^n(p)) + L_{h,\Delta t}^n(Y^n(p)) \right) \left(I + \frac{\Delta t}{2} L_{h,\Delta t}^n(X_a^n(p)) \right) F_a^n(p), \end{aligned} \quad (8.45)$$

donde $L_{h,\Delta t}^m = \text{grad } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^m$, $0 \leq m \leq N$.

- Cálculo de $P_a^{n+1}(x) \sim P(x, t_{n+1})$: En el instante inicial consideramos

$$(X_a)_{n+1}^{n+1}(x) := x \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad (8.46)$$

calculamos $(X_a)_{n+1}^{n+1-j}(x) \sim (X_e)_{n+1}^{n+1-j}(x)$ por recurrencia hasta $j = n+1$:

$$(X_a)_{n+1}^{n+1-j}(x) := (X_a)_{n+1}^{n+1-(j-1)}(x) - \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1-(j-1)}(\tilde{Y}^j(x)) + \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1-j}(\tilde{Y}^j(x)) \right) \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad (8.47)$$

siendo

$$\tilde{Y}^j(x) := (X_a)_{n+1}^{n+1-(j-1)}(x) - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1-(j-1)}((X_a)_{n+1}^{n+1-(j-1)}(x)). \quad (8.48)$$

Entonces consideramos $P_a^{n+1}(x) := (X_a)_{n+1}^0(x)$.

En la práctica, resolvemos por separado la parte fluidodinámica de la parte térmica, en primer lugar se resuelve el problema fluidodinámico y posteriormente el problema térmico. Concretamente, se resuelven los siguientes problemas totalmente discretizados, donde la parte térmica y la fluidodinámica están desacopladas.

Para $n = 0$:

1. **PMD** _{h} ¹.— Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 \in X_{0h}$ y $\pi_{E,h,\Delta t}^1 \in Y_h^1$ tales que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 \cdot \mathbf{w}_h dx + Pr \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 \cdot \text{grad } \mathbf{w}_h dx \\ & - \int_{\Omega} \pi_{E,h,\Delta t}^1 \text{div } \mathbf{w}_h dx = RaPr \int_{\Omega} (0, \phi_{h,\Delta t}^0) \cdot \mathbf{w}_h dx + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\mathbf{v}_{h,\Delta t}^0 \circ (X_a)_1^0) \cdot \mathbf{w}_h dx, \quad \forall \mathbf{w}_h \in X_{0h}, \\ & \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 q_h dx = 0, \quad \forall q_h \in Y_h^1, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^0 &= \Pi_h^b(\mathbf{v}_0), \\ \phi_{h,\Delta t}^0 &= \Pi_h^2(\phi_0). \end{aligned}$$

2. **PED** _{h} ¹.— Encontrar una función $\phi_{m,h,\Delta t}^1 \in Y_h^2$ tal que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\theta \det F_a^1 + (1 - \theta)) \phi_{m,h,\Delta t}^1 z_h dp + \theta^2 \int_{\Omega} (F_a^1)^{-1} (F_a^1)^{-T} \det F_a^1 \nabla \phi_{m,h,\Delta t}^1 \cdot \nabla z_h dp \\ & \quad + (1 - \theta) \theta \int_{\Omega} \nabla \phi_{m,h,\Delta t}^1 \cdot \nabla z_h dp \\ & = \int_{\Gamma_N} (\theta |(F_a^1)^{-T} \mathbf{m}| \det F_a^1 g_N^1 \circ X_a^1 + (1 - \theta) g_N^0) z_h d\Gamma \\ & + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\theta \det F_a^1 + (1 - \theta)) \phi_{m,h,\Delta t}^0 z_h dp - (1 - \theta) \theta \int_{\Omega} (F_a^1)^{-1} (F_a^1)^{-T} \det F_a^1 \nabla \phi_{m,h,\Delta t}^0 \cdot \nabla z_h dp \\ & \quad - (1 - \theta)^2 \int_{\Omega} \nabla \phi_{m,h,\Delta t}^0 \cdot \nabla z_h dp \quad \forall z_h \in Y_{0h}^2, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \phi_{m,h,\Delta t}^0 &= \Pi_h^2(\phi_0), \\ \phi_{m,h,\Delta t}^1|_{\Gamma_D} &= \Pi_{h,\Gamma_D}^2(\phi_D^1). \end{aligned}$$

Para $n \geq 1$:

1. **PMD** _{h} ^{$n+1$} .— Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} \in X_{0h}$ y $\pi_{E,h,\Delta t}^{n+1} \in Y_h^1$ tales que

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} \cdot \mathbf{w}_h dx + Pr \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} \cdot \text{grad } \mathbf{w}_h dx \\ & - \int_{\Omega} \pi_{E,h,\Delta t}^{n+1} \text{div } \mathbf{w}_h dx = RaPr \int_{\Omega} (0, \phi_{h,\Delta t}^n) \cdot \mathbf{w}_h dx + \frac{2}{\Delta t} \int_{\Omega} (\mathbf{v}_{h,\Delta t}^n \circ (X_a)_{n+1}^n) \cdot \mathbf{w}_h dx \\ & \quad - \frac{1}{2\Delta t} \int_{\Omega} (\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n-1} \circ (X_a)_{n+1}^{n-1}) \cdot \mathbf{w}_h dx, \quad \forall \mathbf{w}_h \in X_{0h}, \\ & \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} q dx = 0, \quad \forall q_h \in Y_h^1. \end{aligned}$$

2. **PED** $_h^{n+1}$.— Encontrar una función $\phi_{m,h,\Delta t}^{n+1} \in Y_h^2$ tal que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\theta \det F_a^{n+1} + (1-\theta) \det F_a^n) \phi_{m,h,\Delta t}^{n+1} z_h dp \\ & + \theta^2 \int_{\Omega} (F_a^{n+1})^{-1} (F_a^{n+1})^{-T} \det F_a^{n+1} \nabla \phi_{m,h,\Delta t}^{n+1} \cdot \nabla z_h dp \\ & + (1-\theta) \theta \int_{\Omega} (F_a^n)^{-1} (F_a^n)^{-T} \det F_a^n \nabla \phi_{m,h,\Delta t}^{n+1} \cdot \nabla z_h dp \\ & = \int_{\Gamma_N} (\theta |(F_a^{n+1})^{-T} \mathbf{m}| \det F_a^{n+1} g_N^{n+1} \circ X_a^{n+1} + (1-\theta) |(F_a^n)^{-T} \mathbf{m}| \det F_a^n g_N^n \circ X_a^n) z_h d\Gamma \\ & + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\theta \det F_a^{n+1} + (1-\theta) \det F_a^n) \phi_{m,h,\Delta t}^n z_h dp \\ & - (1-\theta) \theta \int_{\Omega} (F_a^{n+1})^{-1} (F_a^{n+1})^{-T} \det F_a^{n+1} \nabla \phi_{m,h,\Delta t}^n \cdot \nabla z_h dp \\ & - (1-\theta)^2 \int_{\Omega} (F_a^n)^{-1} (F_a^n)^{-T} \det F_a^n \nabla \phi_{m,h,\Delta t}^n \cdot \nabla z_h dp \quad \forall z_h \in Y_{0h}^2, \end{aligned}$$

siendo

$$\phi_{m,h,\Delta t}^{n+1}|_{\Gamma_D} = \Pi_{h,\Gamma_D}^2(\phi_D^{n+1}).$$

Observación 8.3.2. En el problema fluidodinámico **PMD** $_h^{n+1}$ para cada paso de tiempo t_{n+1} calculamos $\phi_{h,\Delta t}^n$ utilizando la siguiente fórmula

$$\phi(x, t_{n+1}) = \phi_m^{n+1}(P(x, t_{n+1})) \sim \phi_{h,\Delta t}^n := \phi_{m,h,\Delta t}^n(P_a(x, t_{n+1})).$$

En la práctica como veremos en la Sección 8.4 será suficiente calcular $P_a^{n+1}(a_i^M)$ para $i = 1, \dots, N^M$. Nótese que para calcular $P_a^{n+1}(a_i^M) \sim P^{n+1}(a_i^M)$ utilizamos las ecuaciones (8.46)-(8.48), por tanto es necesario guardar la velocidad, $\mathbf{v}_{h,\Delta t}^m$, para todos los pasos previos, $0 \leq m \leq n+1$. Además, tenemos que calcular $(X_a)_{n+1}^{n+1-j}(a_i^M)$ para $0 \leq j \leq n+1$. Para ello, en cada paso, j , tenemos que mover hacia atrás los puntos $(X_a)_{n+1}^{n+1-(j-1)}(a_i^M)$ calculados en el paso anterior, por lo que tenemos que calcular la velocidad en dichos puntos y además en los puntos movidos. Para calcular la velocidad en estos puntos es necesario realizar una búsqueda e interpolar. Para realizar esta búsqueda se desconoce un elemento de partida próximo a dichos puntos. Por este motivo esta parte de código requiere un elevado coste computacional. Nótese que estas búsquedas se realizan n veces, por tanto conforme aumenta n el tiempo de cálculo es enorme. Por este motivo y por razones de memoria, para conseguir un método preciso y eficiente, en la práctica reinicializamos el problema cada NR pasos, donde NR disminuye conforme lo hace Δt .

8.3.4. Método PSI

Antes de establecer la discretización temporal vamos a introducir la discretización del término convectivo mediante el método PSI. Escribiremos el problema semidiscretizado como un problema no lineal de tipo Petrov-Galerkin.

En primer lugar, introducimos la discretización del término convectivo de la ecuación (8.6) mediante el método PSI. Concretamente, consideramos la siguiente aproximación

$$\int_{\Omega} (\text{grad } \mathbf{v}_h \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{w}_h dx \simeq \int_{\Omega} (\text{grad } \mathcal{P}(\mathbf{v}_h) \overline{\mathbf{v}_h}) \cdot \overline{\mathcal{P}}_{\mathbf{v}_h}(\mathbf{w}_h) dx,$$

con

$$\overline{\mathbf{v}_h}|_T = \frac{1}{|T|} \int_T \mathbf{v}_h dx, \quad T \in \mathcal{T}_h^M,$$

y siendo $\mathcal{P}(\mathbf{v}_h) = (\Pi_h(u_h), \Pi_h(v_h))$, con $\mathbf{v}_h = (u_h, v_h)$, donde Π_h es el operador de interpolación definido en (5.6); y $\overline{\mathcal{P}}_{\mathbf{v}_h}$ es un operador de interpolación vectorial definido por componentes de forma análoga a (5.13), concretamente dado $\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbf{C}^0(\overline{\Omega})$ definimos $\overline{\mathcal{P}}_{\mathbf{v}_h}(\mathbf{w})$ como

$$(\overline{\mathcal{P}}_{\mathbf{v}_h}(\mathbf{w})) = (\overline{\Pi}_{\Pi_h(u_h)}(w_1), \overline{\Pi}_{\Pi_h(v_h)}(w_2)).$$

Nótese que el método PSI es no lineal por lo que el operador de interpolación $\overline{\Pi}_h$ depende de la variable \mathbf{v}_h . Para la discretización del término convectivo de la ecuación (8.12) también utilizamos el método PSI. Antes de introducir la aproximación definimos el siguiente espacio de elementos finitos

$$\tilde{Y}_h^1 = \left\{ \varphi_h \in C^0(\Omega) : \forall T \in \mathcal{T}_h^E, \varphi_h|_{T_i} \in P_1(T_i), \quad 1 \leq i \leq 4 \right\},$$

donde $\{T_i\}_{i=1}^4$ son cuatro triángulos contenidos en T , cuyos vértices son los nodos del elemento T y tales que $\bigcup_{1 \leq i \leq 4} \{T_i\} = T$, concretamente si denotamos por a_i^T los nodos del elemento T , $1 \leq i \leq 6$, los triángulos $\{T_i\}_{i=1}^4$ se construyen como se muestra en la Figura 8.1. Introducimos el operador de interpolación sobre \tilde{Y}_h^1 , $\underline{\Pi}_h(w)$, definido para $w \in C^0(\overline{\Omega})$, como

$$\begin{cases} \underline{\Pi}_h(w) \in \tilde{Y}_h^1, \\ (\underline{\Pi}_h(w))(a_i^E) = w(a_i^E) \text{ para todo nodo } a_i^E \text{ de } \mathcal{T}_h^E. \end{cases}$$

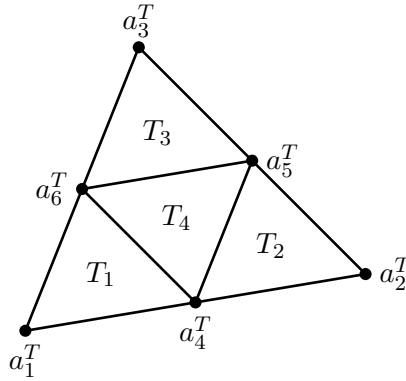


Figura 8.1: Construcción de los minielementos.

Entonces, consideramos la siguiente aproximación

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v}_h \cdot \text{grad } \phi_h) z_h dx \simeq \int_{\Omega} (\overline{\mathbf{v}}_h \cdot \text{grad } \underline{\Pi}_h(\phi_h)) \overline{\Pi}_{\underline{\Pi}_h(\phi_h)}(z_h) dx.$$

Construimos el operador de interpolación $\overline{\Pi}_{\underline{\Pi}_h(\phi_h)}$ a partir de la malla formada por los minielementos¹, es decir considerando la malla cuyos vértices son los nodos de la malla \mathcal{T}_h^E . Además, para el problema que estamos considerando el conjunto de índices I está formado por los nodos interiores y los nodos que pertenecen a Γ_N de la malla \mathcal{T}_h^E (ver Capítulo 5).

Introduciendo estas discretizaciones para el término convectivo del problema \mathbf{PM}_h y $\widetilde{\mathbf{PE}}_h$ obtenemos,

¹Nótese que la discretización del término convectivo mediante el método PSI se introduce para funciones afines a trozos.

respectivamente, los siguientes problemas semidiscretizados en espacio, que cometiendo un abuso de notación denotamos también por \mathbf{PM}_h y $\widetilde{\mathbf{PE}}_h$.

\mathbf{PM}_h .— Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_h \in X_{0h}$ y $\pi_{E,h} \in Y_h^1$ tales que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{v}'_h \cdot \mathbf{w}_h dx + \int_{\Omega} (\text{grad } \mathcal{P}(\mathbf{v}_h) \overline{\mathbf{v}_h}) \cdot \overline{\mathcal{P}_{\mathbf{v}_h}(\mathbf{w}_h)} dx + Pr \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{v}_h \cdot \text{grad } \mathbf{w}_h dx \\ - \int_{\Omega} \pi_{E,h} \text{div } \mathbf{w}_h dx = RaPr \int_{\Omega} (0, \phi_h) \cdot \mathbf{w}_h dx, \quad \forall \mathbf{w}_h \in X_{0h}, \quad \forall t \in (0, t_f), \end{aligned} \quad (8.49)$$

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v}_h q_h dx = 0, \quad \forall q_h \in Y_h^1, \quad (8.50)$$

con

$$\mathbf{v}_h(\cdot, 0) = \Pi_h^b(\mathbf{v}_0). \quad (8.51)$$

$\widetilde{\mathbf{PE}}_h$.— Encontrar una función $\phi_h \in Y_h^2$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi'_h z_h dx + \int_{\Omega} (\overline{\mathbf{v}_h} \cdot \text{grad } \Pi_h(\phi_h)) \overline{\Pi_{\Pi_h(\phi_h)}(z_h)} dx \\ + \int_{\Omega} \text{grad } \phi_h \cdot \text{grad } z_h dx = \int_{\Gamma_N} g_N z_h d\Gamma, \quad \forall z_h \in Y_{0h}^2, \quad \forall t \in (0, t_f), \end{aligned} \quad (8.52)$$

sujeta a la condición de contorno

$$\phi_h(\cdot, t)|_{\Gamma_D} = \Pi_{h, \Gamma_D}^2(\phi_D(\cdot, t)), \quad (8.53)$$

para cada $t \in [0, t_f]$, y a la condición inicial

$$\phi_h(\cdot, 0) = \Pi_h^2(\phi_0). \quad (8.54)$$

Vamos a obtener una discretización temporal de las ecuaciones (8.49) y (8.52). Para ello, aproximamos la derivada temporal de la ecuación (8.49) por la fórmula de dos puntos (8.16) salvo para el primer paso que utilizamos la fórmula (8.17); y para la ecuación (8.52) utilizamos el método presentado en la Sección 6.2. Entonces obtenemos los siguientes problemas discretos de \mathbf{PM}_h y $\widetilde{\mathbf{PE}}_h$

Para $n = 0$:

\mathbf{PDM}_h^1 .— Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_{h, \Delta t}^1 \in X_{0h}$ y $\pi_{E, h, \Delta t}^1 \in Y_h^1$ tales que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h, \Delta t}^1 \cdot \mathbf{w}_h dx + \int_{\Omega} (\text{grad } \mathcal{P}(\mathbf{v}_{h, \Delta t}^1) \overline{\mathbf{v}_{h, \Delta t}^1}) \cdot \overline{\mathcal{P}_{\mathbf{v}_{h, \Delta t}^1}(\mathbf{w}_h)} dx \\ + Pr \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{v}_{h, \Delta t}^1 \cdot \text{grad } \mathbf{w}_h dx - \int_{\Omega} \pi_{E, h, \Delta t}^1 \text{div } \mathbf{w}_h dx \\ = RaPr \int_{\Omega} (0, \phi_{h, \Delta t}^1) \cdot \mathbf{w}_h dx + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h, \Delta t}^0 \cdot \mathbf{w}_h dx, \quad \forall \mathbf{w}_h \in X_{0h}, \end{aligned} \quad (8.55)$$

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v}_{h, \Delta t}^1 q_h dx = 0, \quad \forall q_h \in Y_h^1, \quad (8.56)$$

con

$$\mathbf{v}_{h, \Delta t}^0 = \Pi_h^b(\mathbf{v}_0). \quad (8.57)$$

Para $n \geq 1$:

PDM $_h^{n+1}$.— Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} \in X_{0h}$ y $\pi_{E,h,\Delta t}^{n+1} \in Y_h^1$ tales que

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} \cdot \mathbf{w}_h dx + \int_{\Omega} \left(\text{grad } \mathcal{P}(\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1}) \overline{\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1}} \right) \cdot \overline{\mathcal{P}_{\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1}}}(\mathbf{w}_h) dx \\ & \quad + Pr \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} \cdot \text{grad } \mathbf{w}_h dx - \int_{\Omega} \pi_{E,h,\Delta t}^{n+1} \text{div } \mathbf{w}_h dx \\ & = RaPr \int_{\Omega} (0, \phi_{h,\Delta t}^{n+1}) \cdot \mathbf{w}_h dx + \frac{2}{\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^n \cdot \mathbf{w}_h dx - \frac{1}{2\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n-1} \cdot \mathbf{w}_h dx, \quad \forall \mathbf{w}_h \in X_{0h}, \end{aligned} \quad (8.58)$$

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} q dx = 0, \quad \forall q_h \in Y_h^1. \quad (8.59)$$

Para $n \geq 0$:

$\widetilde{\text{PDE}}_h^{n+1}$.— Encontrar una función $\phi_{h,\Delta t}^{n+1} \in Y_h^2$ tal que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi_{h,\Delta t}^{n+1} z_h dx + \theta \int_{\Omega} \left(\overline{\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1}} \cdot \text{grad } \Pi_h(\phi_{h,\Delta t}^{n+1}) \right) \overline{\Pi_{\Pi_h(\phi_{h,\Delta t}^{n+1})}}(z_h) dx \\ & \quad + \theta \int_{\Omega} \text{grad } \phi_{h,\Delta t}^{n+1} \cdot \text{grad } z_h dx = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi_{h,\Delta t}^n z_h dx \\ & - (1 - \theta) \int_{\Omega} \left(\overline{\mathbf{v}_{h,\Delta t}^n} \cdot \text{grad } \Pi_h(\phi_{h,\Delta t}^n) \right) \overline{\Pi_{\Pi_h(\phi_{h,\Delta t}^n)}}(z_h) dx - (1 - \theta) \int_{\Omega} \text{grad } \phi_{h,\Delta t}^n \cdot \text{grad } z_h dx, \\ & \quad \forall z_h \in Y_{0h}^2, \end{aligned} \quad (8.60)$$

donde

$$\phi_{h,\Delta t}^0 := \Pi_h^2(\phi_0) \quad (8.61)$$

$$\phi_{h,\Delta t}^{n+1}|_{\Gamma_D} = \Pi_{h,\Gamma_D}^2(\phi_D^{n+1}). \quad (8.62)$$

En la práctica, para evitar las no linealidades de los términos convectivos aproximamos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\text{grad } \mathcal{P}(\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1}) \overline{\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1}} \right) \cdot \overline{\mathcal{P}_{\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1}}}(\mathbf{w}_h) dx & \simeq \int_{\Omega} \left(\text{grad } \mathcal{P}(\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1}) \overline{\mathbf{v}_{h,\Delta t}^n} \right) \cdot \overline{\mathcal{P}_{\mathbf{v}_{h,\Delta t}^n}}(\mathbf{w}_h) dx, \\ \int_{\Omega} \left(\overline{\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1}} \cdot \text{grad } \Pi_h(\phi_{h,\Delta t}^{n+1}) \right) \overline{\Pi_{\Pi_h(\phi_{h,\Delta t}^{n+1})}}(z_h) dx & \simeq \int_{\Omega} \left(\overline{\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1}} \cdot \text{grad } \Pi_h(\phi_{h,\Delta t}^{n+1}) \right) \overline{\Pi_{\Pi_h(\phi_{h,\Delta t}^n)}}(z_h) dx. \end{aligned}$$

Para resolver este problema desacoplamos la parte fluidodinámica de la parte térmica de la forma indicada en el Apartado 8.3.1. Concretamente procedemos de la siguiente manera:

Para $n = 0$:

1. **PDM_h¹**.— Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 \in X_{0h}$ y $\pi_{E,h,\Delta t}^1 \in Y_h^1$ tales que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 \cdot \mathbf{w}_h \, dx + \int_{\Omega} \left(\operatorname{grad} \mathcal{P}(\mathbf{v}_{h,\Delta t}^1) \overline{\mathbf{v}_{h,\Delta t}^0} \right) \cdot \overline{\mathcal{P}_{\mathbf{v}_{h,\Delta t}^0}}(\mathbf{w}_h) \, dx \\ & \quad + Pr \int_{\Omega} \operatorname{grad} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 \cdot \operatorname{grad} \mathbf{w}_h \, dx - \int_{\Omega} \pi_{E,h,\Delta t}^1 \operatorname{div} \mathbf{w}_h \, dx \\ & = RaPr \int_{\Omega} (0, \phi_{h,\Delta t}^0) \cdot \mathbf{w}_h \, dx + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^0 \cdot \mathbf{w}_h \, dx, \quad \forall \mathbf{w}_h \in X_{0h}, \\ & \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^1 q_h \, dx = 0, \quad \forall q_h \in Y_h^1, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \phi_{h,\Delta t}^0 &:= \Pi_h^2(\phi_0), \\ \mathbf{v}_{h,\Delta t}^0 &= \Pi_h^b(\mathbf{v}_0). \end{aligned}$$

2. **$\widetilde{\mathbf{PDE}}_h^1$** .— Encontrar una función $\phi_{h,\Delta t}^1 \in Y_h^2$ tal que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi_{h,\Delta t}^1 z_h \, dx + \theta \int_{\Omega} \left(\overline{\mathbf{v}_{h,\Delta t}^1} \cdot \operatorname{grad} \Pi_h(\phi_{h,\Delta t}^1) \right) \overline{\Pi_{\Pi_h}(\phi_{h,\Delta t}^0)}(z_h) \, dx \\ & \quad + \theta \int_{\Omega} \operatorname{grad} \phi_{h,\Delta t}^1 \cdot \operatorname{grad} z_h \, dx = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi_{h,\Delta t}^0 z_h \, dx \\ & - (1 - \theta) \int_{\Omega} \left(\overline{\mathbf{v}_{h,\Delta t}^0} \cdot \operatorname{grad} \Pi_h(\phi_{h,\Delta t}^0) \right) \overline{\Pi_{\Pi_h}(\phi_{h,\Delta t}^0)}(z_h) \, dx - (1 - \theta) \int_{\Omega} \operatorname{grad} \phi_{h,\Delta t}^0 \cdot \operatorname{grad} z_h \, dx, \\ & \quad \forall z_h \in Y_{0h}^2, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_{h,\Delta t}^0 &:= \Pi_h^2(\phi_0), \\ \phi_{h,\Delta t}^1|_{\Gamma_D} &= \Pi_{h,\Gamma_D}^2(\phi_D^1). \end{aligned}$$

Para $n \geq 1$:

1. **$\widetilde{\mathbf{PDE}}_h^{n+1}$** .— Encontrar una función $\phi_{h,\Delta t}^{n+1} \in Y_h^2$ tal que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi_{h,\Delta t}^{n+1} z_h \, dx + \theta \int_{\Omega} \left(\overline{\mathbf{v}_{h,\Delta t}^n} \cdot \operatorname{grad} \Pi_h(\phi_{h,\Delta t}^{n+1}) \right) \overline{\Pi_{\Pi_h}(\phi_{h,\Delta t}^n)}(z_h) \, dx \\ & \quad + \theta \int_{\Omega} \operatorname{grad} \phi_{h,\Delta t}^{n+1} \cdot \operatorname{grad} z_h \, dx = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi_{h,\Delta t}^n z_h \, dx \\ & - (1 - \theta) \int_{\Omega} \left(\overline{\mathbf{v}_{h,\Delta t}^n} \cdot \operatorname{grad} \Pi_h(\phi_{h,\Delta t}^n) \right) \overline{\Pi_{\Pi_h}(\phi_{h,\Delta t}^n)}(z_h) \, dx - (1 - \theta) \int_{\Omega} \operatorname{grad} \phi_{h,\Delta t}^n \cdot \operatorname{grad} z_h \, dx, \\ & \quad \forall z_h \in Y_{0h}^2, \end{aligned}$$

donde

$$\phi_{h,\Delta t}^{n+1}|_{\Gamma_D} = \Pi_{h,\Gamma_D}^2(\phi_D^{n+1}).$$

2. \mathbf{PDM}_h^{n+1} .— Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} \in X_{0h}$ y $\pi_{E,h,\Delta t}^{n+1} \in Y_h^1$ tales que

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} \cdot \mathbf{w}_h dx + \int_{\Omega} \left(\text{grad } \mathcal{P}(\mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1}) \overline{\mathbf{v}_{h,\Delta t}^n} \right) \cdot \overline{\mathcal{P}_{\mathbf{v}_{h,\Delta t}^n}}(\mathbf{w}_h) dx \\ & \quad + Pr \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} \cdot \text{grad } \mathbf{w}_h dx - \int_{\Omega} \pi_{E,h,\Delta t}^{n+1} \text{div } \mathbf{w}_h dx \\ & = RaPr \int_{\Omega} (0, \phi_{h,\Delta t}^{n+1}) \cdot \mathbf{w}_h dx + \frac{2}{\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^n \cdot \mathbf{w}_h dx - \frac{1}{2\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n-1} \cdot \mathbf{w}_h dx, \quad \forall \mathbf{w}_h \in X_{0h}, \\ & \quad \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v}_{h,\Delta t}^{n+1} q dx = 0, \quad \forall q_h \in Y_h^1. \end{aligned}$$

8.4. Resultados Numéricos

Los algoritmos obtenidos en los Apartados 8.3.1, 8.3.2, 8.3.3 y 8.3.4 se implementan mediante programas de ordenador escritos en FORTRAN y los denotamos, respectivamente, por $(\mathcal{SLG})_2^2$, $(\mathcal{SLG})_2^1$, $(\mathcal{LG})_2$ y (\mathcal{PST}) . En esta sección resolvemos un problema bidimensional de convección natural en una cavidad cuadrada donde las paredes verticales se encuentran a distintas temperaturas (ver [35], [37], [81]). Para ello utilizamos los métodos presentados en los Apartados 8.3.1, 8.3.2, 8.3.3 y 8.3.4. Comparamos los resultados obtenidos con los que aparecen en la literatura.

Consideramos el problema bidimensional de convección natural, en una cavidad cuadrada de lado L , de un fluido viscoso, newtoniano, incompresible, de número de Prandtl $Pr = 0.71$ y para el que es válida la aproximación de Boussinesq. Las paredes verticales derecha e izquierda de la cavidad están sometidas a distintas temperaturas; y las paredes horizontales son adiabáticas (están aisladas, no se produce transferencia de calor a través de ellas). El problema considerado está ilustrado en la Figura 8.2. El flujo y la transferencia de calor en la cavidad están gobernados por las ecuaciones adimensionales (7.34)-(7.36). Esas ecuaciones están sujetas a las condiciones iniciales

$$\phi = u = v = 1, \quad \text{cuando } t = 0, \quad (8.63)$$

y a las condiciones de contorno para $t > 0$,

$$u = v = 0 \quad \phi = 1, \text{ para } x_1 = 0, \quad 0 \leq x_2 \leq 1, \quad (8.64)$$

$$u = v = 0 \quad \phi = 0, \text{ para } x_1 = 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 1, \quad (8.65)$$

$$u = v = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0, \text{ para } x_2 = 0, 1, \quad 0 < x_1 < 1. \quad (8.66)$$

Reolvemos este problema utilizando los métodos presentados en los Apartados 8.3.1, 8.3.2, 8.3.3 y 8.3.4.

Las soluciones de este problema -velocidad, temperatura y presión- han sido obtenidas para números de Rayleigh² en el rango $10^3 \leq Ra \leq 10^7$.

Iteramos hasta alcanzar el estado estacionario. Para asegurar que dicha solución estacionaria se ha alcanzado imponemos el siguiente test de parada :

$$E^n = \frac{\| \mathbf{v}_h^{n+1} - \mathbf{v}_h^n \|_{0,\infty,\Omega}}{\Delta t} \leq 10^{-8}.$$

²Existe un valor crítico del número de Rayleigh a partir del cual se producen movimientos convectivos apareciendo lo que se llama inestabilidad de Rayleigh-Benard (ver [72]).

$$\begin{array}{ccc}
u = 0, \ v = 0, \ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0 & & \\
& \boxed{ \begin{array}{c} t = 0 \\ u = v = \phi = 1 \end{array} } & \\
u = 0, \ v = 0, \ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0 & & \\
\begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0 \\ \phi = 1 \end{array} & & \begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0 \\ \phi = 0 \end{array}
\end{array}$$

Figura 8.2: Definición del problema.

En algunas simulaciones no se logra verificar dicho test, por lo que en ese caso consideramos que el estado estacionario se alcanza cuando el error E^n se estanca. En la práctica los productos interiores en la formulación de Galerkin se aproximan utilizando integración numérica. Concretamente, tras sucesivas validaciones mediante ejemplos de prueba “académicos”, consideramos oportuno utilizar las siguientes fórmulas numéricas:

- Para calcular las integrales correspondientes a la parte fluidodinámica utilizamos integración exacta salvo para los términos correspondientes a las características y el término que involucra la temperatura. Concretamente, los términos de características se aproximan usando la siguiente descomposición propuesta por Pironneau (ver [60]):

$$\int_T (\mathbf{v}_{h,\Delta t}^l \circ (X_a)_j^l) \cdot \mathbf{w}_h \, d\mathbf{x} = \int_T (\mathbf{v}_{h,\Delta t}^l \circ (X_a)_j^l - \mathbf{v}_{h,\Delta t}^l) \cdot \mathbf{w}_h \, dx + \int_T \mathbf{v}_{h,\Delta t}^l \cdot \mathbf{w}_h \, dx. \quad (8.67)$$

La primera integral a la derecha de la igualdad se calcula utilizando una fórmula de cuadratura exacta para polinomios de grado 1 y la segunda se calcula exactamente. Para la integral que aparece en la parte fluidodinámica que involucra a la temperatura procedemos de la siguiente manera: en primer lugar se hace una interpolación \mathbb{P}_1 de la temperatura sobre cada elemento de la malla \mathcal{T}_h^M , y en segundo lugar las integrales obtenidas se calculan de manera exacta.

- Las integrales correspondientes a la parte térmica se aproximan utilizando una fórmula de cuadratura exacta para polinomios de grado 2.

Para realizar la integración exacta empleamos la siguiente fórmula:

$$\int_T (\lambda_1^T)^{\alpha_1} (\lambda_2^T)^{\alpha_2} (\lambda_3^T)^{\alpha_3} \, dx = \frac{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3! 2!}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2)!} \cdot \text{Área}(T),$$

’donde $\{\lambda_1^T, \lambda_2^T, \lambda_3^T\}$ denotan las coordenadas baricéntricas con respecto a los vértices del elemento T .

En las simulaciones tomamos $\theta = 0.5$.

A partir de las magnitudes adimensionales se obtiene un coeficiente local de transmisión térmica, llamado también número de Nusselt Nu ,

$$Nu(x_1, x_2) = u\phi - \frac{\partial \phi}{\partial x_1}.$$

Nótese que $u = 0$ sobre la frontera.

En una cavidad con paredes horizontales aisladas, se tiene que el flujo de calor a través de cualquier línea que une esas dos paredes -incluyendo las dos paredes verticales- debe ser el mismo. En efecto, primeramente el flujo de calor a través de cualquier línea paralela al eje x_2 , está dado por

$$Nu_{x_1} = \int_0^1 Nu(x_1, x_2) dx_2.$$

Probemos que es independiente de x_1 . Teniendo en cuenta que el flujo es incompresible, que la velocidad es nula sobre la frontera y que ϕ es la solución estacionaria del problema con ecuación (7.36) y condiciones de contorno dadas en (8.65) y (8.66), resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} Nu_{x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^1 Nu(x_1, x_2) dx_2 = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1} Nu(x_1, x_2) dx_2 = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \phi + u \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \right) (x_1, x_2) dx_2 = \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} - v \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) (x_1, x_2) dx_2 \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} - v \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_2} \phi \right) (x_1, x_2) dx_2 = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} - v \phi \right) (x_1, x_2) dx_2 \\ &= \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_2} (x_1, x_2) - v(x_1, x_2) \phi(x_1, x_2) \right]_{x_2=0}^{x_2=1} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} (x_1, 1) - v(x_1, 1) \phi(x_1, 1) \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} (x_1, 0) - v(x_1, 0) \phi(x_1, 0) \right) = 0, \end{aligned}$$

lo que prueba nuestra afirmación.

La media del número de Nusselt en la cavidad está dado por

$$\overline{Nu} = \int_0^1 Nu_{x_1} dx_1.$$

Calculamos esta integral utilizando la regla de Simpson compuesta para los métodos propuestos en los Apartados 8.3.1 ($(\mathcal{SLG})_2^2$), 8.3.2 ($(\mathcal{SLG})_2^1$), 8.3.3 ($(\mathcal{LG})_2$) y 8.3.4 (\mathcal{PST}). En la Tabla 8.1 presentamos los valores obtenidos y los comparamos con los que aparecen en la literatura. En [35] el problema se formula en términos de la función de corriente y la vorticidad; y se resuelve utilizando un método de diferencias finitas para mallados uniformes desde $h = 0.1$ hasta $h = 0.0125$. Finalmente, utilizando un proceso de extrapolación, se obtiene una solución de referencia con la que comparamos nuestros resultados. En este trabajo utilizamos mallados desde $h = 0.032$ hasta $h = 0.005$. Concretamente, para los métodos $(\mathcal{SLG})_2^1$, $(\mathcal{LG})_2$ y (\mathcal{PST}) utilizamos mallas desde $h = 0.032$ hasta $h = 0.0125$ para todas las simulaciones, sin embargo para el método $(\mathcal{SLG})_2^2$ cuando $Ra \geq 10^6$ es necesario utilizar una malla más fina, en efecto consideramos $h = 0.005$, a pesar de ello no se mejoran los resultados numéricos obtenidos con el método $(\mathcal{SLG})_2^1$ para una malla más grosera ($h = 0.0125$). Para $Ra = 10^7$ es necesario utilizar mallas finas ($h = 0.005$) y pasos de tiempo muy pequeños para que los métodos converjan, por lo que aumenta el tiempo de cálculo necesario para las simulaciones. Por este motivo para este valor del número de Rayleigh sólo calculamos las soluciones numéricas con el método $(\mathcal{SLG})_2^2$, por ser el método más eficiente de los considerados en este trabajo (ver Tabla 4.1). En todas las simulaciones tomamos Δt lo suficientemente pequeño para que los métodos evolutivos converjan a la solución estacionaria. En las Figuras 8.3 - 8.17 representamos las curvas de nivel de la temperatura, velocidad horizontal y velocidad vertical.

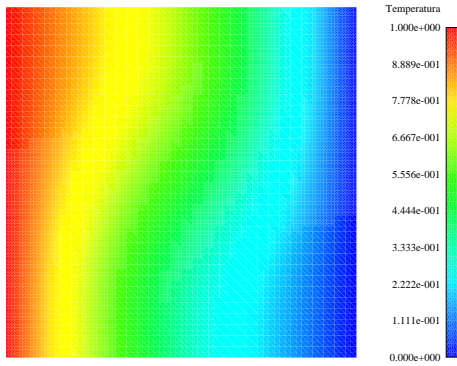
El problema de convección natural en una cavidad cuadrada con paredes verticales sometidas a distintas temperaturas presenta dos tipos diferentes de flujo: (1) debido a las condiciones de contorno; (2) un

Ref Ra	Ref. [35]	Ref. [54]	Ref. [53]	Ref. [81]	$(\mathcal{SLG})_2^2$	$(\mathcal{SLG})_2^1$	$(\mathcal{LG})_2$	(\mathcal{PSI})
10^3	1.118	1.117	1.074	1.117	1.112	1.112	1.113	1.152
10^4	2.243	2.243	2.084	2.254	2.228	2.219	2.228	1.896
10^5	4.519	4.521	4.3	4.598	4.450	4.527	4.503	3.333
10^6	8.800	8.806	8.743	8.976	8.783	8.710	8.720	5.867
10^7	—	16.40	13.99	16.656	16.46			

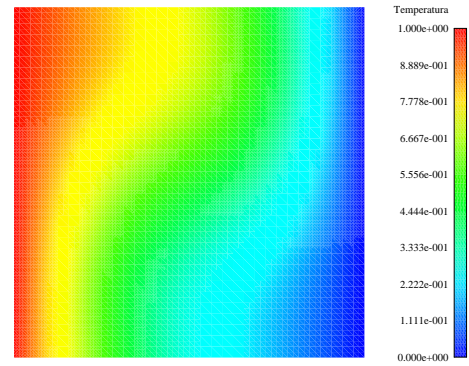
Tabla 8.1: Comparación de la media del número de Nusselt en la cavidad.

movimiento en la región central. El primero es el más importante para valores de Ra grandes, mientras que el segundo domina para valores de Ra pequeños. Estas características se observan en las Figuras 8.3 - 8.17. En las curvas de nivel para la velocidad horizontal se ven dos remolinos horizontales cuando $Ra = 10^3, 10^4$. Para valores más grandes del número de Rayleigh esos remolinos se despliegan a la esquina de arriba izquierda y a la esquina de abajo derecha. Algo análogo ocurre para las curvas de nivel de la velocidad horizontal, en este caso aparecen dos remolinos verticales para $Ra = 10^3$. Esos remolinos se concentran en las paredes fría y caliente conforme aumenta el número de Rayleigh. Los diferentes tipos de flujo que ocurren se representan bien en las Figuras 8.3 - 8.7. Para el valor de Rayleigh más pequeño, la temperatura es casi lineal con líneas de contorno verticales; la transferencia de calor es casi totalmente por conducción. Conforme aumenta el número de Rayleigh la convección se vuelve dominante. El gradiente horizontal de la temperatura es más pequeño, lo que indica que la transferencia de calor por conducción se está reduciendo. Para $Ra \geq 10^5$ los contornos se vuelven horizontales salvo cerca de la pared fría y caliente que permanecen paralelas a las paredes verticales.

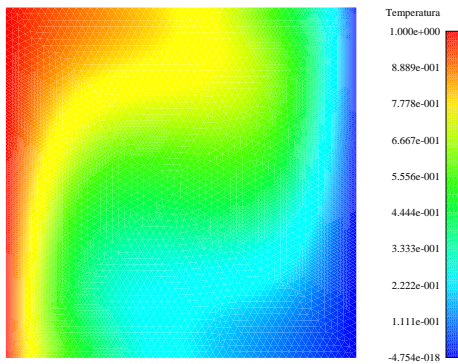
Todos los métodos presentados en este trabajo proporcionan soluciones numéricas que cualitativamente son análogas a las que se presentan en la literatura, sin embargo como se puede ver en la Tabla 8.1, desde el punto de vista cuantitativo, los métodos de características proporcionan datos más precisos que el método \mathcal{PSI} .



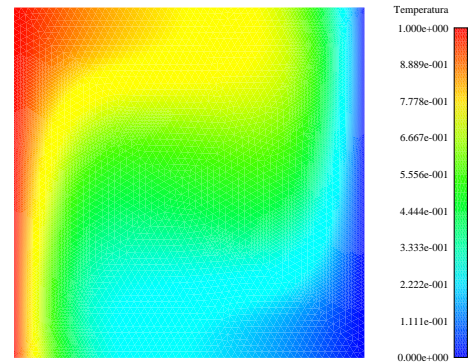
$(\mathcal{LG})_2$, $Ra = 10^3$, $h = 0.032$.



(\mathcal{PSI}) , $Ra = 10^3$, $h = 0.032$.

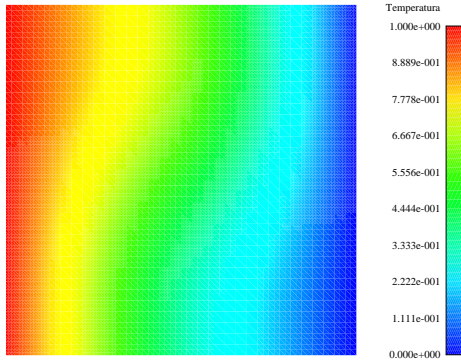


$(\mathcal{LG})_2$, $Ra = 10^4$, $h = 0.02$.

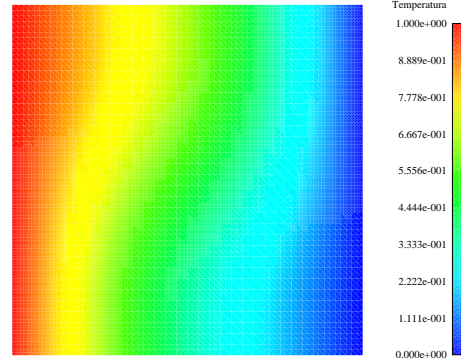


(\mathcal{PSI}) , $Ra = 10^4$, $h = 0.02$.

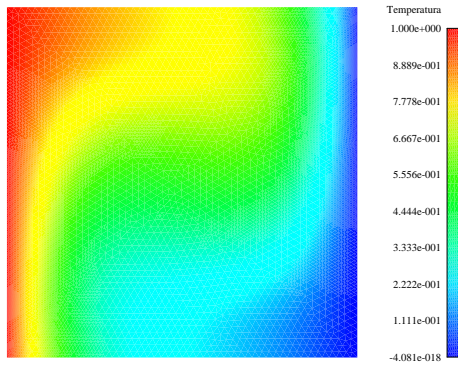
Figura 8.3: Isothermas calculadas utilizando el método $(\mathcal{LG})_2$ (izquierda) y el método PSI (derecha), para $Ra = 10^3$ (arriba) y $Ra = 10^4$ (abajo); tomamos $h = 0.032$ cuando $Ra = 10^3$ y $h = 0.02$ para $Ra = 10^4$.



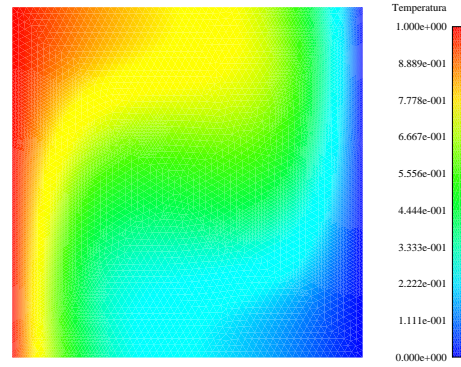
$(\mathcal{SLG})_2^1, Ra = 10^3, h = 0.032.$



$(\mathcal{SLG})_2^2, Ra = 10^3, h = 0.032.$

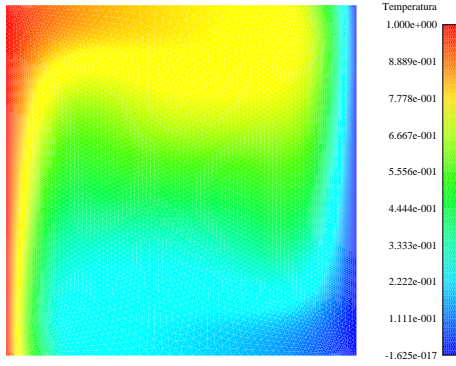


$(\mathcal{SLG})_2^1, Ra = 10^4, h = 0.02.$

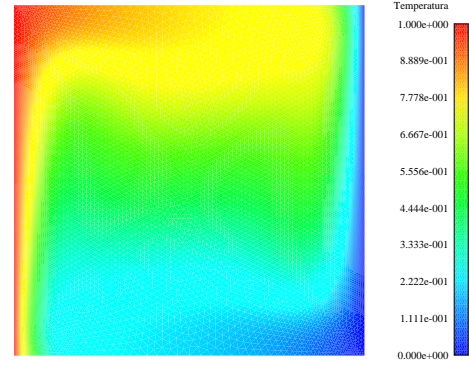


$(\mathcal{SLG})_2^2, Ra = 10^4, h = 0.02.$

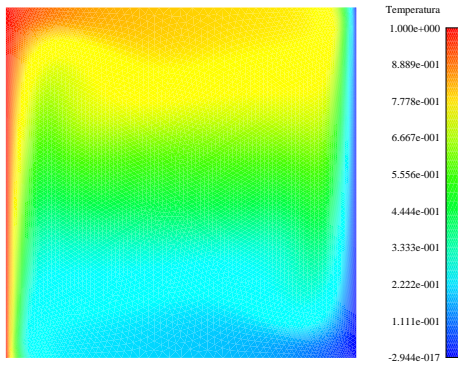
Figura 8.4: Isothermas calculadas utilizando el método $(\mathcal{SLG})_2^1$ (izquierda) y el método $(\mathcal{SLG})_2^2$ (derecha), para $Ra = 10^3$ (arriba) y $Ra = 10^4$ (abajo); tomamos $h = 0.032$ cuando $Ra = 10^3$ y $h = 0.02$ para $Ra = 10^4$.



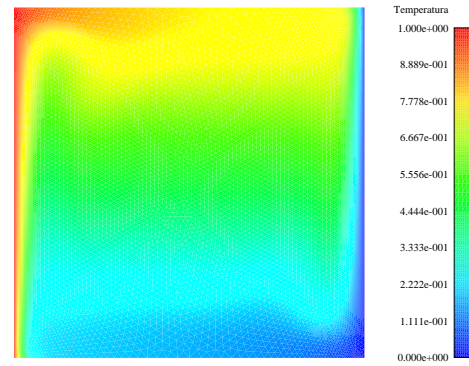
$(\mathcal{LG})_2$, $Ra = 10^5$, $h = 0.0125$.



(\mathcal{PSI}) , $Ra = 10^5$, $h = 0.0125$.

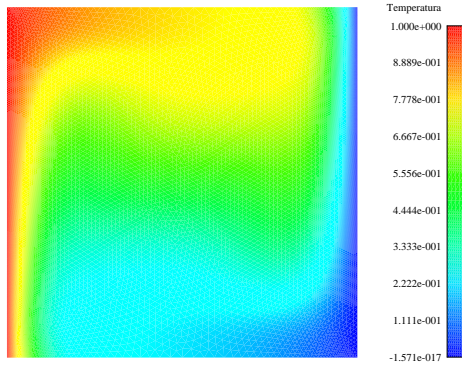


$(\mathcal{LG})_2$, $Ra = 10^6$, $h = 0.0125$.

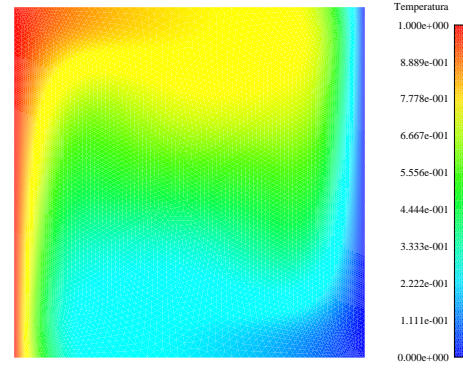


(\mathcal{PSI}) , $Ra = 10^6$, $h = 0.0125$.

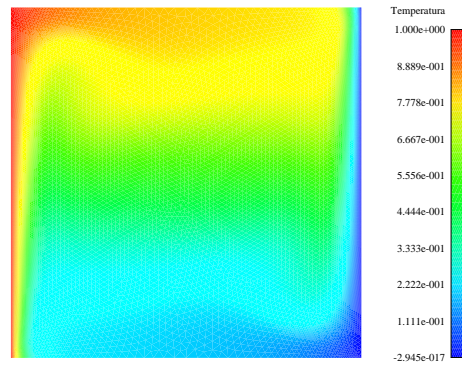
Figura 8.5: Isotermas calculadas utilizando el método $(\mathcal{LG})_2$ y el método \mathcal{PSI} , para $Ra = 10^5$ (arriba) y $Ra = 10^6$ (abajo); consideramos $h = 0.0125$.



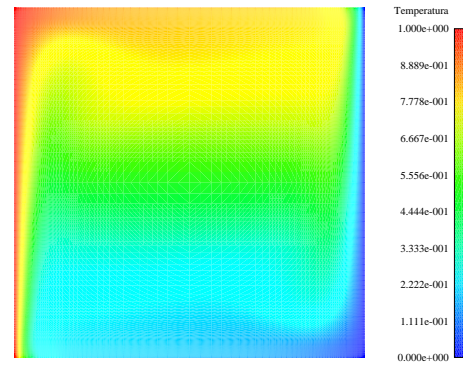
$(\mathcal{SLG})_2^1, Ra = 10^5, h = 0.0125.$



$(\mathcal{SLG})_2^2, Ra = 10^5, h = 0.0125.$



$(\mathcal{SLG})_2^1, Ra = 10^6, h = 0.0125.$



$(\mathcal{SLG})_2^2, Ra = 10^6, h = 0.005.$

Figura 8.6: Isothermas calculadas utilizando el método $(\mathcal{SLG})_2^1$ (izquierda) y el método $(\mathcal{SLG})_2^2$ (derecha), para $Ra = 10^5$ (arriba) y $Ra = 10^6$ (abajo).

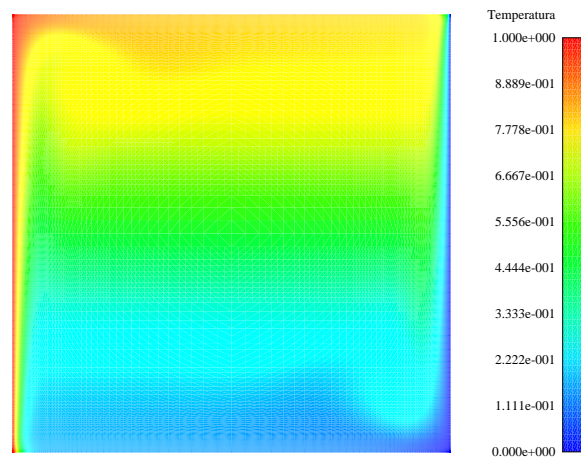
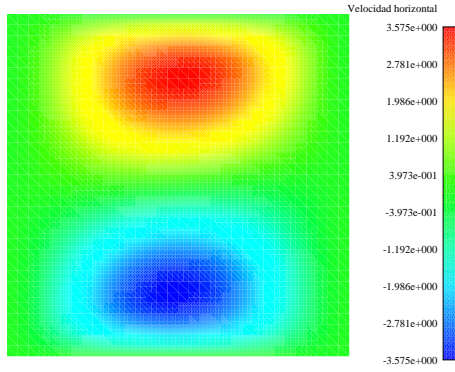
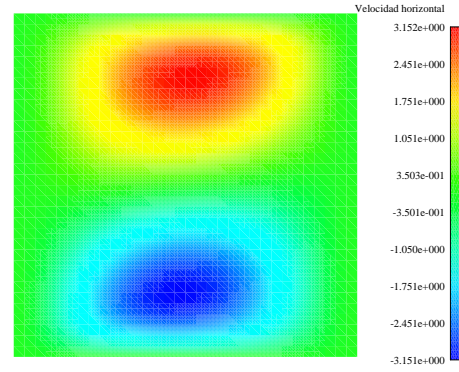


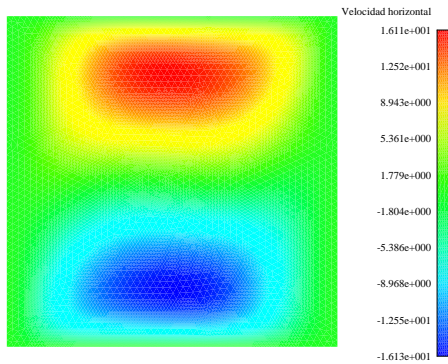
Figura 8.7: Isothermas calculada utilizando el método $(\mathcal{SLG})_2^2$ para $Ra = 10^7$; tomamos $h = 0.005$.



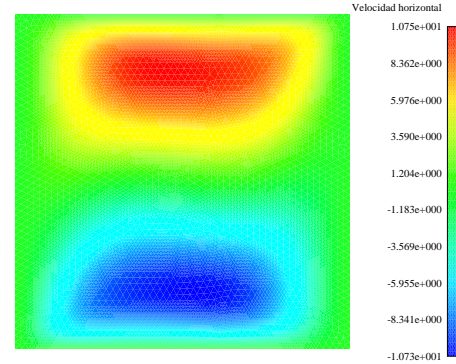
$(\mathcal{LG})_2$, $Ra = 10^3$, $h = 0.032$.



(\mathcal{PSI}) , $Ra = 10^3$, $h = 0.032$.



$(\mathcal{LG})_2$, $Ra = 10^4$, $h = 0.02$.



(\mathcal{PSI}) , $Ra = 10^4$, $h = 0.02$.

Figura 8.8: Curvas de nivel para la velocidad horizontal calculadas utilizando el método $(\mathcal{LG})_2$ (izquierda) y el método PSI (derecha), para $Ra = 10^3$ (arriba) y $Ra = 10^4$ (abajo); tomamos $h = 0.032$ cuando $Ra = 10^3$ y $h = 0.02$ para $Ra = 10^4$.

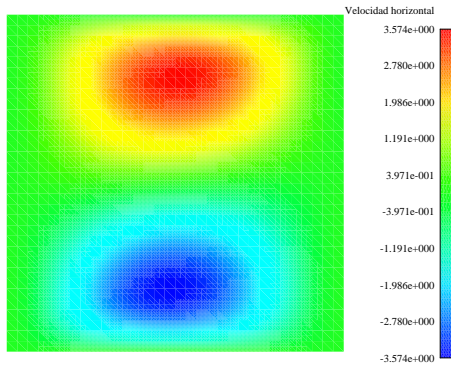
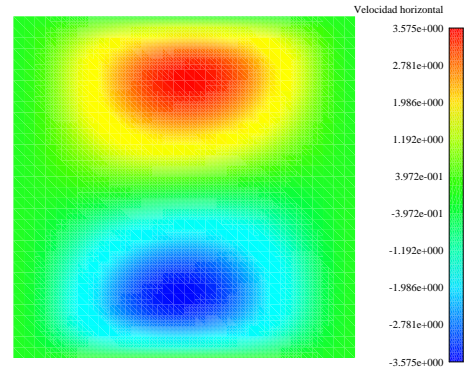
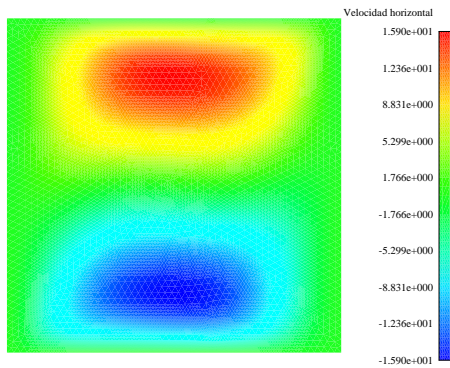
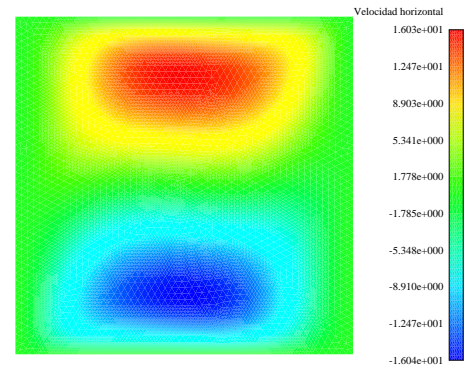
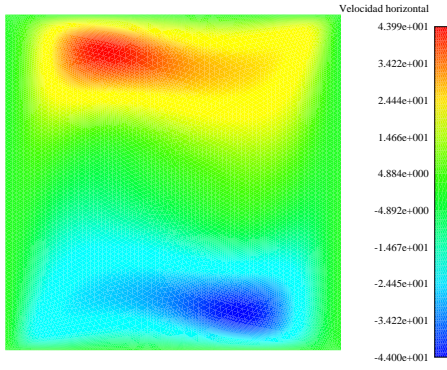
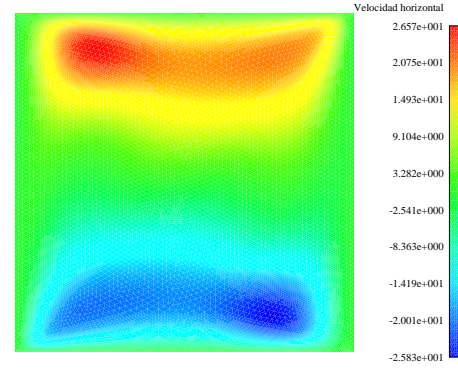

 $(\mathcal{SLG})_2^1, Ra = 10^3, h = 0.032.$

 $(\mathcal{SLG})_2^2, Ra = 10^3, h = 0.032.$

 $(\mathcal{SLG})_2^1, Ra = 10^4, h = 0.02.$

 $(\mathcal{SLG})_2^2, Ra = 10^4, h = 0.02.$

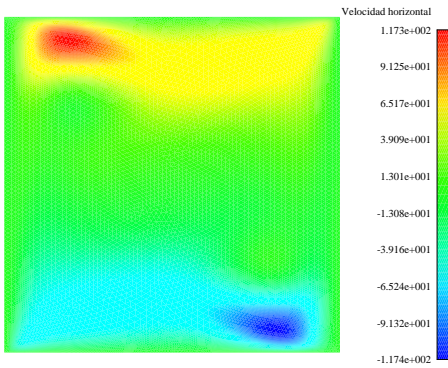
Figura 8.9: Curvas de nivel para la velocidad horizontal calculadas utilizando el método $(\mathcal{SLG})_2^1$ (izquierda) y el método $(\mathcal{SLG})_2^2$ (derecha), para $Ra = 10^3$ (arriba) y $Ra = 10^4$ (abajo); tomamos $h = 0.032$ cuando $Ra = 10^3$ y $h = 0.02$ para $Ra = 10^4$.



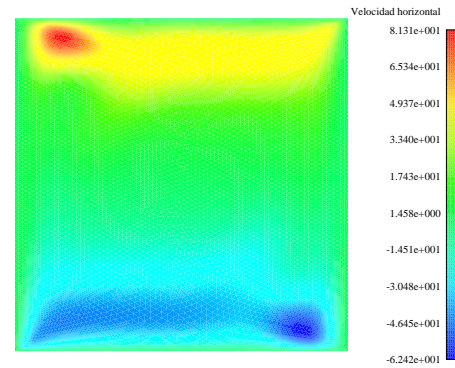
$(\mathcal{LG})_2$, $Ra = 10^5$, $h = 0.0125$.



(PSI) , $Ra = 10^5$, $h = 0.0125$.



$(\mathcal{LG})_2$, $Ra = 10^6$, $h = 0.0125$.



(PSI) , $Ra = 10^6$, $h = 0.0125$.

Figura 8.10: Curvas de nivel para la velocidad horizontal calculadas utilizando el método $(\mathcal{LG})_2$ (izquierda) y el método PSI (derecha) para $Ra = 10^5$ (arriba) y $Ra = 10^6$ (abajo); consideramos $h = 0.0125$.

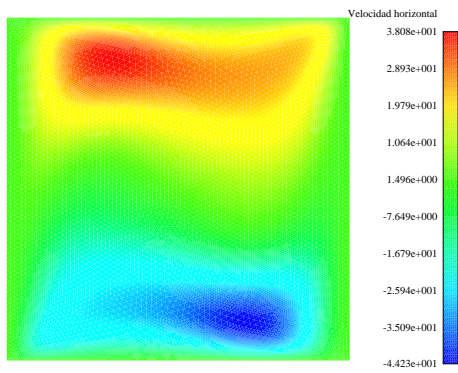
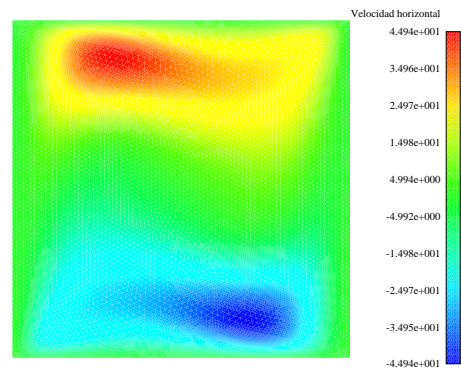
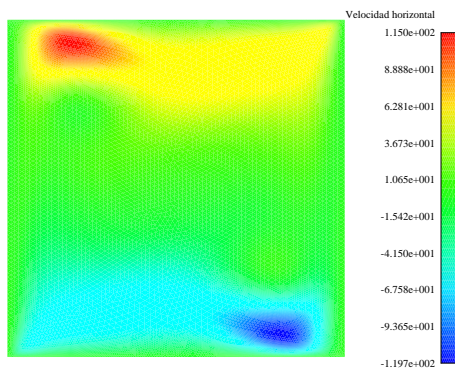
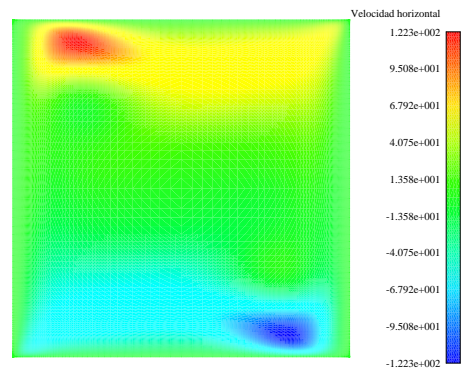

 $(\mathcal{SLG})_2^1, Ra = 10^5, h = 0.0125.$

 $(\mathcal{SLG})_2^2, Ra = 10^5, h = 0.0125.$

 $(\mathcal{SLG})_2^1, Ra = 10^6, h = 0.0125.$

 $(\mathcal{SLG})_2^2, Ra = 10^6, h = 0.005.$

Figura 8.11: Curvas de nivel para la velocidad horizontal calculadas utilizando los métodos $(\mathcal{SLG})_2^1$ (izquierda) y $(\mathcal{SLG})_2^2$ (derecha), para $Ra = 10^5$ (arriba) y $Ra = 10^6$ (abajo).

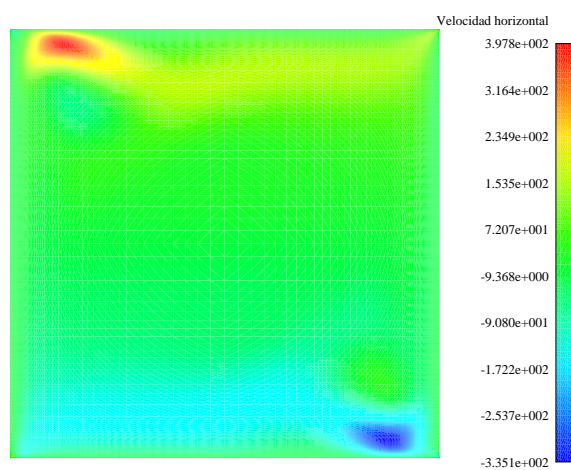
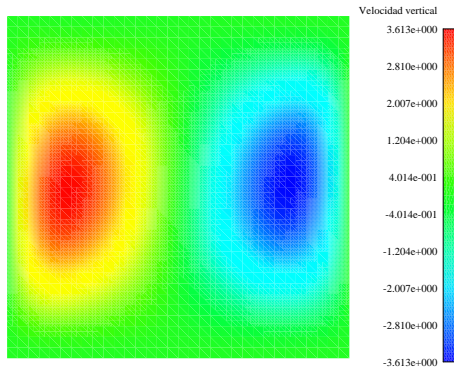
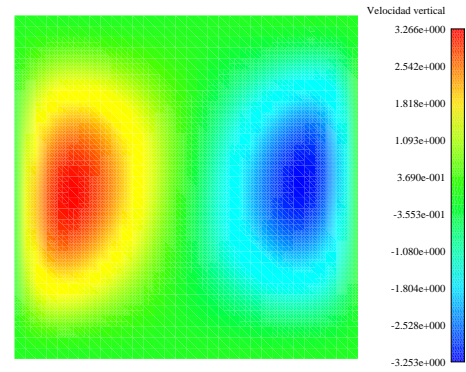


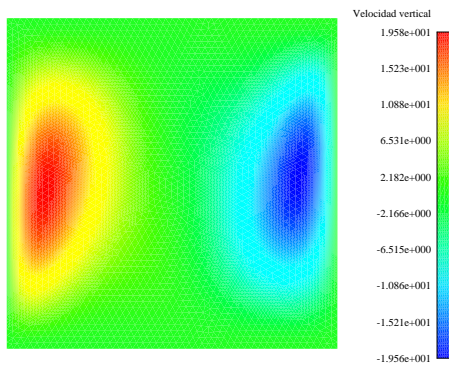
Figura 8.12: Curvas de nivel para la velocidad horizontal calculada utilizando el método $(\mathcal{SLG})_2^2$ para $Ra = 10^7$; tomamos $h = 0.005$.



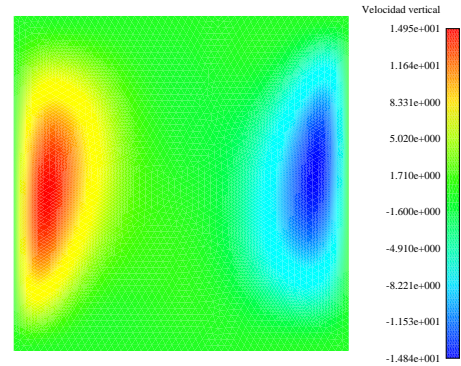
$(\mathcal{LG})_2$, $Ra = 10^3$, $h = 0.032$.



(\mathcal{PSI}) , $Ra = 10^3$, $h = 0.032$.

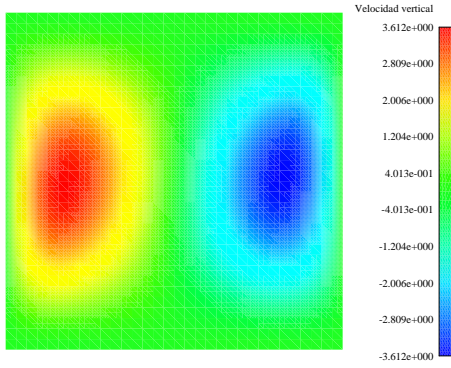


$(\mathcal{LG})_2$, $Ra = 10^4$, $h = 0.02$.

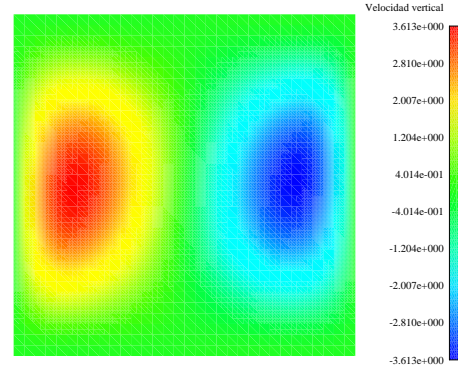


(\mathcal{PSI}) , $Ra = 10^4$, $h = 0.02$.

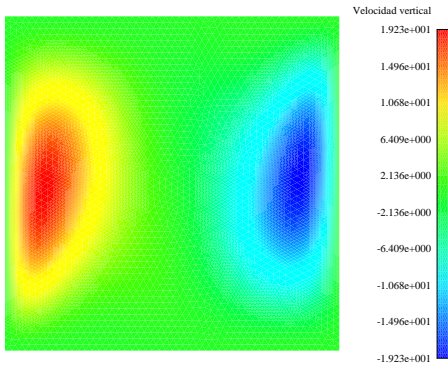
Figura 8.13: Curvas de nivel para la velocidad vertical calculadas utilizando el método $(\mathcal{LG})_2$ (izquierda) y el método PSI (derecha), para $Ra = 10^3$ (arriba) y $Ra = 10^4$ (abajo); tomamos $h = 0.032$ cuando $Ra = 10^3$ y $h = 0.02$ para $Ra = 10^4$.



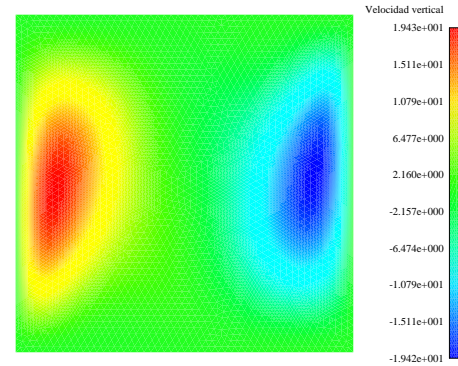
$(\mathcal{SLG})_2^1, Ra = 10^3, h = 0.032.$



$(\mathcal{SLG})_2^2, Ra = 10^3, h = 0.032.$

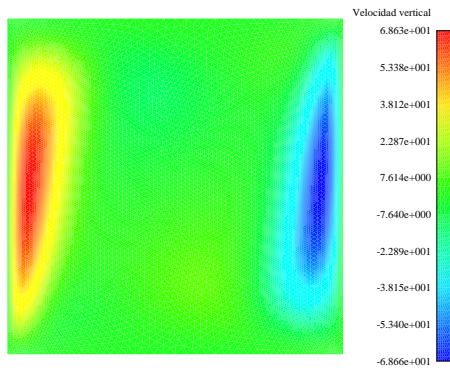


$(\mathcal{SLG})_2^1, Ra = 10^4, h = 0.02.$

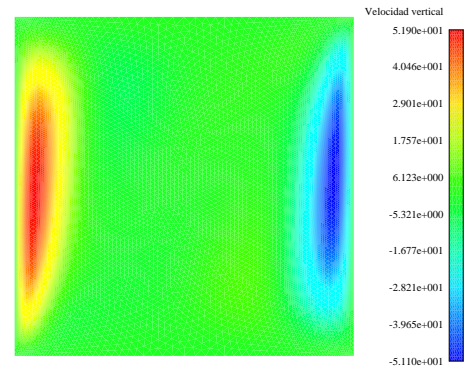


$(\mathcal{SLG})_2^2, Ra = 10^4, h = 0.02.$

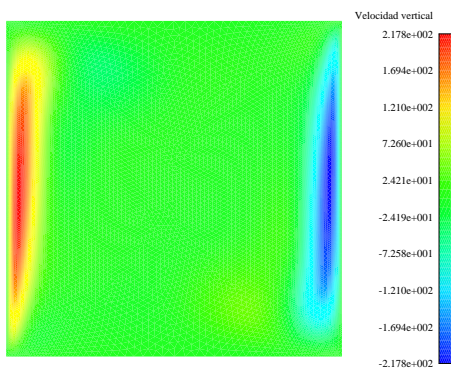
Figura 8.14: Curvas de nivel para la velocidad vertical calculadas utilizando el método $(\mathcal{SLG})_2^1$ (izquierda) y el método $(\mathcal{SLG})_2^2$ (derecha), para $Ra = 10^3$ (arriba) y $Ra = 10^4$ (abajo); tomamos $h = 0.032$ cuando $Ra = 10^3$ y $h = 0.02$ para $Ra = 10^4$.



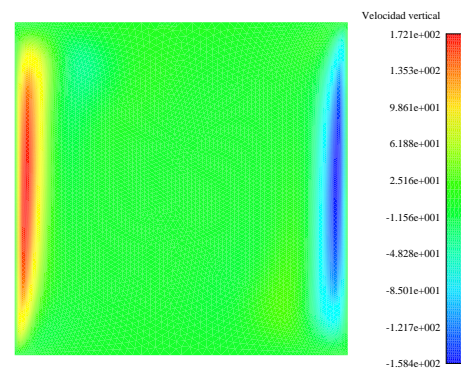
$(\mathcal{LG})_2$, $Ra = 10^5$, $h = 0.0125$.



(PSI) , $Ra = 10^5$, $h = 0.0125$.

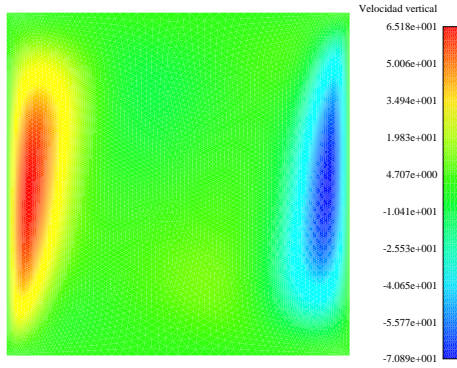


$(\mathcal{LG})_2$, $Ra = 10^6$, $h = 0.0125$.

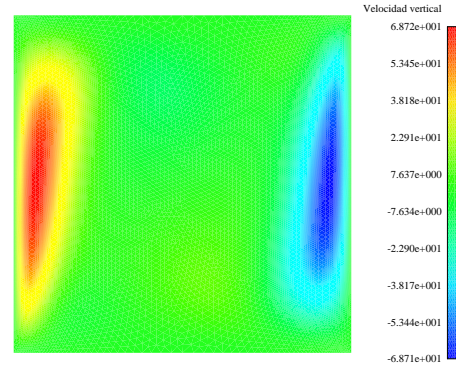


(PSI) , $Ra = 10^6$, $h = 0.0125$.

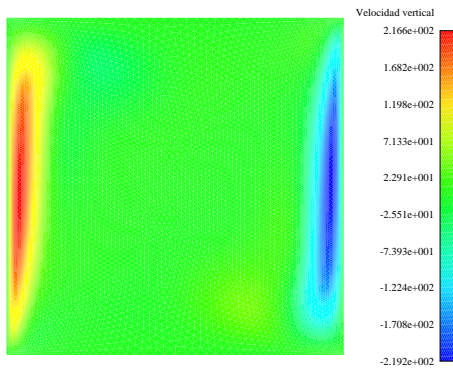
Figura 8.15: Curvas de nivel para la velocidad vertical calculadas utilizando el método $(\mathcal{LG})_2$ (izquierda) y el método PSI (derecha) para $Ra = 10^5$ (arriba) y $Ra = 10^6$ (abajo); consideramos $h = 0.0125$.



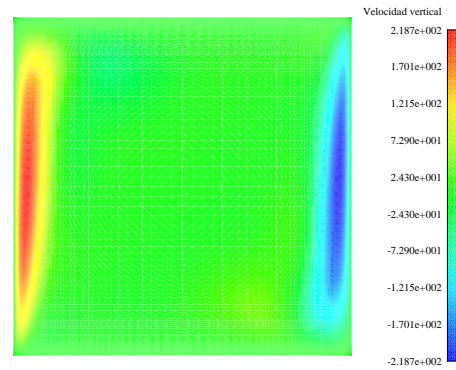
$(\mathcal{SLG})_2^1, Ra = 10^5, h = 0.0125.$



$(\mathcal{SLG})_2^2, Ra = 10^5, h = 0.0125.$



$(\mathcal{SLG})_2^1, Ra = 10^6, h = 0.0125.$



$(\mathcal{SLG})_2^2, Ra = 10^6, h = 0.0125.$

Figura 8.16: Curvas de nivel para la velocidad vertical calculadas utilizando los métodos $(\mathcal{SLG})_2^1$ (izquierda) y $(\mathcal{SLG})_2^2$ (derecha), para $Ra = 10^5$ (arriba) y $Ra = 10^6$ (abajo).

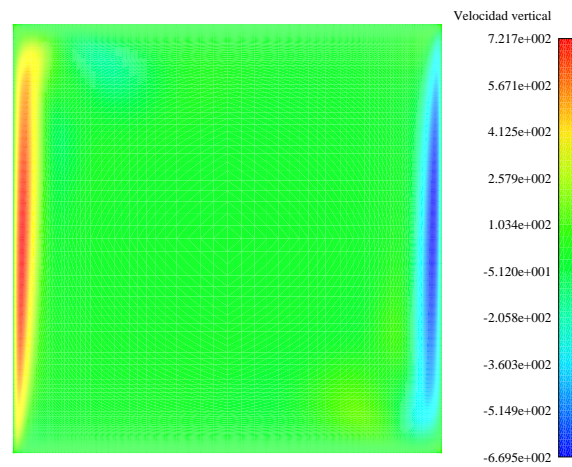


Figura 8.17: Curvas de nivel para la velocidad vertical calculada utilizando el método $(\mathcal{SLG})_2^2$ para $Ra = 10^7$; tomamos $h = 0.005$.

Conclusiones

El objetivo de ese trabajo ha sido desarrollar métodos numéricos precisos y estables para problemas de convección-difusión. Como aplicación particular hemos considerado los procesos de convección natural. Hemos considerado dos estrategias diferentes de discretización que descentran el término convectivo: métodos de características y métodos distributivos. Estos métodos presentan buenas propiedades, lo que hacen de ellos una herramienta eficaz para la resolución numérica de problemas de convección.

Para asegurar que las soluciones numéricas reproduzcan las propiedades físicas del problema es necesario utilizar métodos numéricos de segundo orden. En este trabajo hemos considerado dos métodos: un método de segundo orden de Lagrange-Galerkin y el método PSI. El método de Lagrange-Galerkin ha sido completamente analizado en el siguiente sentido:

- Hemos introducido formulaciones débiles que generalizan a la clásica y con las que es posible obtener a la vez métodos Lagrangianos y semi-Lagrangianos.
- Hemos analizado un nuevo método enteramente Lagrangiano de características de segundo orden. Hemos probado la estabilidad del método en norma $l^\infty(H^1(\Omega))$. Además hemos obtenido un resultado de estabilidad en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ con constantes independientes del coeficiente tensorial de difusión, por tanto válido incluso para la ecuación de transporte.
- Se ha probado la convergencia del método semidiscretizado en tiempo con orden $O(\Delta t^2)$ en norma $l^\infty(H^1(\Omega))$. Cabe destacar que la convergencia en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ que hemos obtenido es válida para la ecuación de transporte.
- Se ha analizado el método totalmente discretizado. Para la discretización espacial hemos utilizado un método de elementos finitos. Hemos probado la convergencia del método discretizado en tiempo y espacio con orden $O(\Delta t^2 + h^k)$. Concretamente, la convergencia en norma $l^\infty(L^2(\Omega))$ que hemos obtenido involucra constantes que se mantienen acotadas en el límite hiperbólico.
- Hemos implementado los diferentes métodos de características que se han propuesto en este trabajo mediante programas escritos en FORTRAN. Hemos presentado ejemplos numéricos en dominios bidimensionales; se ha realizado un análisis comparativo entre los diferentes métodos y se han verificado las propiedades obtenidas para el método Lagrangiano que hemos estudiado en este trabajo.

A continuación, hemos propuesto una alternativa a los métodos de características: los métodos distributivos. Hemos presentado de forma rigurosa la formulación general de dichos métodos. En particular, se han considerado dos de los métodos distributivos más importantes: el N-esquema y el PSI. Los algoritmos obtenidos para estos métodos se han implementado mediante programas escritos en FORTRAN. Hemos presentado algunos resultados numéricos que corroboran los resultados teóricos que se han obtenido en la literatura y hemos comparado los resultados numéricos con los que hemos obtenido utilizando métodos de características.

Por último, se han recordado los modelos matemáticos implicados en los procesos de convección natural. Para su resolución numérica se ha utilizado un método de elementos finitos y se han propuesto diferentes métodos para la discretización temporal: métodos de características de segundo orden y el método PSI. Hemos implementado los diferentes métodos mediante programas escritos en FORTRAN y hemos resuelto un problema de convección natural muy extendido en la literatura. Se han comparado los resultados numéricos obtenidos con los presentados por otros autores.

En un futuro se trataría de llevar a cabo un análisis matemático de la influencia de las fórmulas de cuadratura para el método Lagrangiano que se estudia en este trabajo. Por otro lado, sería interesante introducir un método Lagrangiano para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, implementarlo con programas de ordenador y realizar análisis comparativos entre otros métodos de características más clásicos. Finalmente, se trataría de diseñar un algoritmo para resolver problemas de convección natural con métodos enteramente Lagrangianos; implementarlo en el ordenador y comparar los resultados que se obtengan con los presentados en este trabajo.

Bibliografía

- [1] R. Abgrall. Toward the ultimate conservative scheme : Following the quest. *J. Comput. Physics*, 167:277–315, 2001.
- [2] R. Abgrall and M. Mezone. Construction of second-order accurate monotone and stable residual distribution schemes for unsteady flow problems. *J. Comput. Phys.*, 188:16–55, 2003.
- [3] R. Abgrall and M. Mezone. Construction of second-order accurate monotone and stable residual distribution schemes for unsteady flow problems. *J. Comput. Phys.*, 195:474–507, 2004.
- [4] R.A. Adams. Sobolev Spaces. *Academic Press, New York*, 1975.
- [5] A. Allievi and R. Bermejo. A generalized particle search-locate algorithm for arbitrary grids. *J. Comput. Phys.*, 132(2):157–166, 1997.
- [6] T.M. Apostol. Análisis matemático. *Editorial Reverté*, Barcelona, 1996.
- [7] M.D. Baker, E. Süli, and A.F. Ware. Stability and convergence of the spectral Lagrange-Galerkin method for mixed periodic/non-periodic convection-dominated diffusion problems. *IMA J. Numer. Anal.*, 19:637–663, 1999.
- [8] R. E. Bank and R. F. Santos. Analysis of some moving space-time finite element methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30:1–18, 1993.
- [9] J. Baranger, D. Esslaoui, and A. Machmoum. Error estimate for convection problem with characteristics method. *Numer. Algorithms*, 21 (1999):49–56. Numerical methods for partial differential equations (Marrakech, 1998).
- [10] J. Baranger and A. Machmoum. Une norme “naturelle” pour la méthode des caractéristiques en éléments finis discontinus: cas 1-D. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 30:549–574, 1996.
- [11] J. Baranger and A. Machmoum. A “natural” norm for the method of characteristics using discontinuous finite elements: 2D and 3D case. *Math. Model. Numer. Anal.*, 33:1223–1240, 1999.
- [12] M. Bause and P. Knabner. Uniform error analysis for Lagrange-Galerkin approximations of convection-dominated problems. *SIAM. J. Numer. Anal.*, 39:1954–1984, 2002.
- [13] M. Bause and P. Knabner. On uniform convergence rates for Eulerian and Lagrangian finite element approximations of convection-dominated diffusion problems. *Calcolo*, 41:1–26, 2004.
- [14] M. Benitez. Simulación numérica en Ingeniería y Ciencias Aplicadas I y II. Trabajo de Investigación Tutelado. Universidade de Santiago de Compostela. 2006.

- [15] M. Benítez and A. Bermúdez. Métodos de Elementos Finitos y de Características para la Simulación de la Convección Natural. *Actas del XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones. X Congreso de Matemática Aplicada*, Sevilla, España, 2007. ISBN: 978-84-690-71.
- [16] M. Benítez, T. Chacón, M. Gómez, and RGÑarbona. On the Singular Limit for Normal Flux Boundary Conditions. *Eccomas 2008. 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, pages 161–161, Joint 8th Wccm8 and Eccomas 2008. Venecia, Italia. Int Center Numerical Methods Engineering (Cimne), 2008.
- [17] A. Bermúdez and J. Durany. La méthode des caractéristiques pour les problèmes de convection-diffusion stationnaires. *Math. Model. Numer. Anal.*, 21:7–26, 1987.
- [18] A. Bermúdez. Continuum Thermomechanics. Birkhäuser Verlag, Berlin. *Progress in Mathematical Physics*, 43, 2005.
- [19] A. Bermúdez, M.R. Nogueiras, and C. Vázquez. Numerical solution of (degenerated) convection-diffusion-reaction problems with higher order characteristics/finite elements. Part I: Time discretization. *SIAM. J. Numer. Anal.*, 44:1829–1853, 2006.
- [20] A. Bermúdez, M.R. Nogueiras, and C. Vázquez. Numerical solution of (degenerated) convection-diffusion-reaction problems with higher order characteristics/finite elements. Part II: Fully Discretized Scheme and Quadrature Formulas. *SIAM. J. Numer. Anal.*, 44:1854–1876, 2006.
- [21] K. Boukir, Y. Maday, and B. Métivet. A high-order characteristics method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 116:211–218, 1994. ICOSAHOM’92 (Montpellier, 1992).
- [22] K. Boukir, Y. Maday, B. Métivet, and E. Razafindrakoto. A high-order characteristics/finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 25:1421–1454, 1997.
- [23] J. Casado, T. Chacón, V. Girault, M. Gómez, and F. Murat. Finite elements approximation of second order linear elliptic equations in divergence form with right-hand side in L^1 . *Numer. Math.*, 105:337–374, 2007.
- [24] J. Casado, T. Chacón, V. Girault, M. Gómez, and F. Murat. PSI Solution of Convection-Diffusion Equations with Data in L^1 . Proceedings of ENUMATH 2007, the 7th European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications, Graz, Austria, September 2007. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 2008.
- [25] T. Chacón, M. Gómez, and G. Narbona. Numerical analysis of the PSI solution of advection-diffusion problems through a Petrov-Galerkin formulation. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 17:1905–1936, 2007, no. 11.
- [26] D.R. Chenoweth and S. Paolucci. Natural convection in an enclosed vertical air layer with large horizontal temperature differences. *J. Fluid Mech.*, 169:173–210, 1986.
- [27] K. Chrysafinos and N. J. Walkington. Error estimates for discontinuous Galerkin approximations of implicit parabolic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43:2478–2499 (electronic), 2006.
- [28] K. Chrysafinos and N. J. Walkington. Error estimates for the discontinuous Galerkin methods for parabolic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44:349–366 (electronic), 2006.

-
- [29] K. Chrysafinos and N. J. Walkington. Lagrangian and moving mesh methods for the convection diffusion equation. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 42:25–55, 2008.
- [30] P.G. Ciarlet. The finite element method for elliptic problems. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [31] P.G. Ciarlet and P.A. Raviart. Maximum principle and uniform convergence for the finite element method. *Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2:17–31, 1973.
- [32] B. Cockburn. An introduction to the discontinuous Galerkin method for advection-dominated problems. *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, (Cetraro, 1997), 1697:151–268, Lecture Notes in Math. (Springer, 1998).
- [33] B. Cockburn and C. Shu. Nonlinearly stable compact schemes for shock calculations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31:607–627, 1994.
- [34] G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina, and A. Prignet. Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data. *Ann. Scuola Norm. Sup.*, 28:741–808, 1999.
- [35] G. de Vahl Davis. Natural convection of air in a square cavity: a benchmark numerical solution. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 3:249–64, 1983.
- [36] H. Deconinck, R. Struijs, P. Bourgeois, and P.L. Roe. Compact advection schemes on unstructured meshes. *Comput. Fluid Dynamics*, VKI Lecture Series 1993-04, 1993.
- [37] H. Ding, C. Shu, K.S. Yeo, and D. Xu. Development of Least-Square-Based Two-Dimensional Finite Difference Schemes and their Application to Simulate Natural Convection in a Cavity. *Comp. & Fluids*, 33:137–154, 2004.
- [38] J. Douglas, Jr., and T.F. Russell. Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19:871–885, 1982.
- [39] T. F. Dupont and Y. Liu. Symmetric error estimates for moving mesh Galerkin methods for advection-diffusion equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40:914–927 (electronic), 2002.
- [40] R.E. Ewing and T.F. Russel. Multistep galerkin methods along characteristics for convection-diffusion problems. *IMACS Publications. Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations IV*, pages 28–36, 1981.
- [41] J.M. Fernández and V. Gallardo. Energía solar térmica en la edificación. AMV Ediciones, 2004.
- [42] G. Fourestey. Stabilité des méthodes de Lagrange-Galerkin du premier et du second ordre. *tech. report, INRIA, Rapport de recherche*, 2002.
- [43] G. Fourestey. Stabilité des méthodes de Lagrange-Galerkin du premier et du second ordre. *tech. report, INRIA, Rapport de recherche*, 2002.
- [44] L. P. Franca and S. L. Frey. Stabilized finite element methods. II. The incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 99:209–233, 1992.
- [45] L. P. Franca, S. L. Frey, and T. J. R. Hughes. Stabilized finite element methods. I. Application to the advective-diffusive model. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 95:253–276, 1992.
- [46] M.E. Gurtin. An Introduction to Continuum Mechanics. *Mathematics in Science and Engineering*, 158, Academic Press, San Diego, 1981.

- [47] K.A.R. Ismail and J.R. Henríquez. Two-dimensional model for the double glass naturally ventilated window. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 48:461–475, 2005.
- [48] O. Kavian. Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques. *Springer-Verlag France, Paris*, 1993.
- [49] J. D. Lambert. Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: the Initial Value Problem. *John Wiley & Sons, Chichester*, 1991.
- [50] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid mechanics. Oxford. *Course of Theoretical Physics*, 6, 1982.
- [51] J.L. Lions and F. Murat. Solutions renormalisées d'équations elliptic non linéaires. (to appear).
- [52] Y. Liu, R. E. Bank, T. F. Dupont, S. Garcia, and R. F. Santos. Symmetric error estimates for moving mesh mixed methods for advection-diffusion equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40:2270–2291 (electronic) (2003), 2002.
- [53] M.T. Manzari. An explicit finite element algorithm for convective heat transfer problems. *Int. J. Numer. Meth. Heat Fluid Flow*, 9:860–877, 1999.
- [54] N. Massarotti, P. Nithiarasu, and O.C. Zienkiewicz. Characteristic-based-split (cbs) algorithm for incompressible flow problems with heat transfer. *Int. J. Numer. Meth. Heat Fluid Flow*, 8:969–990, 1998.
- [55] K.W. Morton, A. Priestley, and E. Süli. Stability of the Lagrange-Galerkin Method with non-exac integration. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 22:625–653, 1998.
- [56] F. Murat. Soluciones renormalizadas de edp elípticas no lineales. Publication 93023 du Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Paris VI. 1993.
- [57] F. Murat. Équations elliptiques non linéaires avec second membre L^1 ou mesure. In: Actes du 26ème Congrès national d'analyse numérique (Les Karelis, juin 1994), Université de Lyon I. pages A12–A24, 1994.
- [58] G. Narbona. Aproximación numérica de algunos flujos de interés en Arquitectura e Ingeniería mediante esquemas positivos en elementos finitos. tesis. universidad de sevilla. 2004.
- [59] H. Paillère, H. Deconinck, R. Struijs, P.L. Roe, L.M. Mesaros, and J.D. Müller. Computations of inviscid compressible flows using fluctuacion-splitting on triangular meshes. *AIAA*, 93-3301, 1993.
- [60] C. Parés. étude mathématique et approximation numérique de quelques problèmes aux limites de la mécanique des fluides incompressibles. Thèse. Université Paris VI. 1992.
- [61] B. Perthame. Convergence of N-schemes for linear advection equations. *Trends in Applications of Mathematics to Mechanics*, (Lisbon, 1994)77:323–333, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., Longman, 1995.
- [62] B. Perthame, Y. Qiu, and B. Stoufflet. Sur la convergence des schemas “fluctuation-splitting” pour l'advection et leur utilisation en dynamique des gaz. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math.*, 319:283–288, 1994.
- [63] O. Pironneau. On the Transport-Diffusion Algorithm and Its Applications to the Navier-Stokes Equations. *Numer. Math.*, 38:309–332, 1982.

-
- [64] O. Pironneau. Finite Element Methods for Fluids. *John Wiley & Sons*, Paris, 1989.
- [65] O. Pironneau, J. Liou, and T. Tezduyar. Characteristic-Galerkin and Galerkin/least-squares space-time formulations for the advection-diffusion equations with time-dependent domains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 100:117–141, 1992.
- [66] A. Priestley. Exact projections and the Lagrange-Galerkin method: a realistic alternative to quadrature. *J. Comput. Phys.*, 112:316–333, 1994.
- [67] A. Quarteroni and A. Valli. Numerical approximation of partial differential equations. *Springer Series in Computational Mathematics*, Springer-Verlag, 23, Berlin, 1994.
- [68] M. Rodríguez. Numerical analysis of second order Lagrange-Galerkin schemes. Application to option pricing problems. Tesis. Universidade de Santiago de Compostela. 2005.
- [69] P.L. Roe. A Framework for Numerical Evolution Problems. *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Academic Press, 1982.
- [70] P.L. Roe and D. Sildikover. Unification of some advection schemes in two dimensions. *Technical Report*, 95-10, ICASE, 1995.
- [71] H. Rui and M. Tabata. A second order characteristic finite element scheme for convection-diffusion problems. *Numer. Math.*, 92:161–177, 2002.
- [72] H. Schlichting and K. Gersten. Boundary layer theory. Ed. Springer-Verlag. 2004.
- [73] E.M. Stein. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton, New Jersey, 1970.
- [74] R. Struijs, H. Deconinck, and P.L. Roe. Fluctuation splitting schemes for the 2D Euler equations. VKI Lecture Series 1991-01. *Comput. Fluid Dynamics*, 1991.
- [75] R. Struijs, H. Deconinck, P.L. Roe, P. Do Palma, and A. G. Powell. Progress on multidimensional upwind Euler solvers for unstructured grids. *AIAA*, 91-1550, 1991.
- [76] E. Süli. Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations. *Numer. Math.*, 53:459–483, 1988.
- [77] E. Süli. Stability and convergence of the Lagrange-Galerkin method with non-exact integration. Academic Press, London. *The mathematics of finite elements and applications*, VI, pages 435–442, 1988.
- [78] M. Tabata and S. Fujima. Robustness of a characteristic finite element scheme of second order in time increment. *tech. report, MHF Preprint Series*, 2004.
- [79] E. F. Toro. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. *Springer-Verlag, Berlin*, 1997.
- [80] E.F. Toro. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer-Verlag, 1977.
- [81] D.C. Wan, B.S.V. Patnaik, and G.W. Wei. A new Benchmark Quality Solution for the Buoyancy-Driven Cavity by Discrete Singular Convolution, Part B. *Numerical Heat Transfer*, 40:199–228, 2001.